

# **Numerical Methods for the Investigation of Stabilizability of Constrained Systems**

Dissertation  
zur  
Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur

der  
Fakultät für Maschinenbau  
der Ruhr-Universität Bochum

von  
Moritz Schulze Darup  
aus Coesfeld

Bochum 2014

Dissertation eingereicht am: 20. März 2014  
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Mai 2014  
Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. Martin Mönningmann  
Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. Rolf Findeisen

Schriftenreihe des Lehrstuhls für Regelungstechnik und  
Systemtheorie

**Moritz Schulze Darup**

**Numerical Methods for the Investigation of  
Stabilizability of Constrained Systems**

Shaker Verlag  
Aachen 2015

**Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek**

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Bochum, Univ., Diss., 2014

Copyright Shaker Verlag 2015

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-3904-7

ISSN 2195-0113

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • e-mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik und Systemtheorie der Ruhr-Universität Bochum. Teile der Arbeit wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (im Rahmen der Projekte MO 1086/9-1 und -2) gefördert.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Mönnigmann, für die Betreuung dieser Arbeit. Seine Unterstützung, seine Impulse und seine Aufgeschlossenheit für neue (teils abenteuerliche) Ideen waren Grundvoraussetzung für das Gelingen dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. Rolf Findeisen danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und für die Übernahme des Korreferats.

Bei allen Kollegen und Mitarbeitern des Lehrstuhls möchte ich mich ausdrücklich für die stets gute und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre bedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Günter Gehre für die begeisterte Vermittlung regelungstechnischer Grundlagen sowie Herrn Dipl.-Ing. Michael Jost, Frau Dr.-Ing. Darya Kastisian, Herr Dipl.-Inf. Martin Kastisian und Herrn Dipl.-Ing. Sebastian Leonow für viele hilfreiche Diskussionen und unterhaltsame Konferenzbesuche.

Abschließend möchte ich mich herzlich bei meinen Eltern Anita und Max und meiner Freundin Stefanie für die großartige Unterstützung jenseits der fachlichen Herausforderungen bedanken.

Bochum, im März 2014

Moritz Schulze Darup

# Kurzfassung

Die gezielte Stabilisierung dynamischer Systeme durch den Einsatz geeigneter Regler ist eine zentrale Aufgabe der Regelungstechnik. Diese Aufgabe kann offensichtlich nur dann erfüllt werden, wenn das betrachtete System tatsächlich *stabilisierbar* ist, das heißt, wenn die Existenz eines stabilisierenden Regelgesetzes sichergestellt werden kann. Für einfache lineare Systeme ohne Beschränkungen (an Zustände oder Stellgrößen) stehen handliche algebraische Kriterien zur Überprüfung der Stabilisierbarkeit bereit. Für komplexere nichtlineare Systeme mit Zustands- und Stellbeschränkungen sind derartige Kriterien nicht bekannt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden numerische Methoden zur rigorosen Überprüfung der Stabilisierbarkeit nichtlinearer Systeme mit Beschränkungen erarbeitet. Im Detail werden Verfahren zur Berechnung stabilisierbarer Gebiete im Zustandsraum vorgestellt und weiterentwickelt. Ein zentrales Ziel der Arbeit besteht in diesem Zusammenhang darin, die Genauigkeit der ermittelten Gebiete in Hinblick auf das größte stabilisierbare Gebiet zu quantifizieren.

Mit Blick auf die eingangs beschriebene Aufgabenstellung stellt die Identifikation stabilisierbarer Zustände nur den ersten Schritt zur Stabilisierung des Systems dar. Der zweite Teil der Arbeit zielt folgerichtig auf den Entwurf stabilisierender Regler ab. Basierend auf den ermittelten stabilisierbaren Gebieten werden effiziente modellprädiktive und zeitoptimale Regelungsschemata vorgestellt und ausgelegt.

Der letzte Teil der Arbeit behandelt die exemplarische Anwendung der entwickelten Methoden auf ausgewählte praxisrelevante Systeme. Es werden u.a. Regelungskonzepte für die Überwachung des Blutglukosespiegels und zum Betrieb eines chemischen Reaktors vorgestellt. Bemerkenswert ist, dass basierend auf dem erarbeiteten Methodenkatalog für beide Anwendungen sichergestellt werden kann, dass mindestens 97% aller stabilisierbaren Zustände durch den gewählten Regler auch tatsächlich stabilisiert werden<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Der Anteil stabilisierbarer Zustände bezieht sich auf die Analyse eines Modells. Die direkte Übertragung der Aussage auf das reale System ist natürlich nur dann gültig, wenn das zu Grunde liegende Modell exakt ist.

# Abstract

The systematic stabilization of dynamical systems based on a suitable controller is a central task in automatic control. Obviously, this task can only be solved if the underlying system is indeed stabilizable, i.e., if the existence of a stabilizing control law can be guaranteed. For linear unconstrained systems, simple algebraic criteria for the verification of stabilizability are available. In contrast, for nonlinear systems with state and input constraints, such criteria are missing.

The thesis deals with numerical methods for the rigorous investigation of stabilizability of constrained systems. In particular, we present and extend procedures for the computation of stabilizable sets. In this context, the accuracy of the evaluated sets w.r.t. the largest stabilizable set (LSS) is of central interest. To measure accuracy, we rigorously compute inner and outer approximations of the LSS using reachability analysis.

With regard to the initially mentioned task, the identification of stabilizable states only marks the first step towards the stabilization of dynamical systems. Consequently, the second part of the thesis is aimed at the design of stabilizing control laws. Based on the evaluated stabilizable sets, we present efficient model predictive and time-optimal control schemes suitable for nonlinear, bilinear, and linear systems, respectively.

The last part of the thesis concentrates on the exemplary application of the developed methods to some selected systems with practical relevance. Inter alia, we provide control concepts for blood glucose regulation and the operation of a chemical reactor. It is remarkable that, for both applications, we are able to guarantee that at least 97% of all stabilizable states will indeed be stabilized by the designed controllers<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Note that the percentage of stabilizable states was evaluated based on a model. Clearly, for the real process this statement only holds, if the underlying model is exact.





# Contents

<b>Notation</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Basics on Stabilizability of Constrained Systems</b>	<b>5</b>
2.1 Basic Definitions and Assumptions . . . . .	5
2.2 Fundamental Statements and Concepts . . . . .	8
2.2.1 Iterative Stabilizable Set Enlargement . . . . .	9
2.2.2 Excluding Unstabilizable States . . . . .	11
2.3 Learning from Linear Systems . . . . .	12
2.3.1 Stabilizable Nucleus . . . . .	12
2.3.2 One-Step Set Evaluation . . . . .	14
2.3.3 Inner and Outer Approximation of the Largest Stabilizable Set . . . . .	15
2.3.4 Accuracy Measure via Scaling . . . . .	17
2.3.5 Simple Stabilizing Control Schemes . . . . .	17
2.4 Strategies for Nonlinear Systems . . . . .	19
2.4.1 Stabilizable Ellipsoids . . . . .	20
2.4.2 One-step Set Approximation . . . . .	20
2.4.3 Inner Approximation of the Largest Stabilizable Set . . . . .	24
<b>3 Accurate Approximation of the Largest Stabilizable Set</b>	<b>25</b>
3.1 Brute Force for Nonlinear Systems . . . . .	25
3.1.1 Identification of Stabilizable Ellipsoids . . . . .	26
3.1.2 Inner and Outer Approximation of the Largest Stabilizable Set . . . . .	33
3.1.3 Accuracy Measure via Volume Computation . . . . .	38
3.2 Linear Thinking for Bilinear Systems . . . . .	38
3.2.1 Stabilizable Ellipsoids . . . . .	39
3.2.2 Exact State Space Linearization . . . . .	40
3.2.3 Smart Constraint Reformulation . . . . .	45
3.2.4 Inner and Outer Approximation of the Largest Stabilizable Set . . . . .	50
3.2.5 Accuracy Measure via Binary Tree . . . . .	53
3.3 Guaranteed Success for Linear Systems . . . . .	61
3.3.1 The Stabilizable Interior of Controlled Invariant Sets . . . . .	64

---

<b>4</b>	<b>Design of Stabilizing Control Laws</b>	<b>73</b>
4.1	Stabilizing Nonlinear Systems with Piecewise Constant Control Laws . . . . .	73
4.1.1	Benefits for Nonlinear Model Predictive Control . . . . .	75
4.2	Time-Optimal Control of Bilinear Systems . . . . .	81
4.2.1	Traversing the Path of Constraints . . . . .	83
4.3	Stabilizing Linear Systems on Controlled Invariant Sets . . . . .	88
4.3.1	Stabilizing Control Scheme with $n$ -Step Prediction . . . . .	89
4.3.2	Proof of Contraction . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Examples of Practical Interest</b>	<b>99</b>
5.1	Double Integrator . . . . .	99
5.2	Blood Glucose Regulation . . . . .	101
5.3	Fluidized-Bed Reactor . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Conclusions and Outlook</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Additional Algorithms</b>	<b>117</b>
<b>B</b>	<b>Background of Practical Examples</b>	<b>119</b>
B.1	Double Integrator . . . . .	119
B.2	Blood Glucose Regulation . . . . .	119
B.3	Fluidized-Bed Reactor . . . . .	121
<b>C</b>	<b>Interval Arithmetic and Automatic Differentiation</b>	<b>125</b>
C.1	Interval Arithmetic . . . . .	125
C.2	Sequential Function Evaluation using Codelists . . . . .	127
C.3	Automatic Differentiation . . . . .	127
<b>D</b>	<b>Supplementary Proofs</b>	<b>131</b>
D.1	Basics on Stabilizability of Constrained Systems . . . . .	131
D.2	Accurate Approximation of the Largest Stabilizable Set . . . . .	136
D.3	Design of Stabilizing Control Laws . . . . .	140
<b>E</b>	<b>Implementation Details</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>147</b>
	Literature . . . . .	147
	Publications . . . . .	152
	<b>Curriculum vitae</b>	<b>155</b>