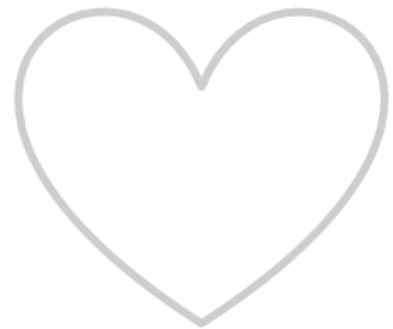


# MATSE-MATIK

herausgegeben von  
Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff  
FH Aachen - Campus Jülich

Christof Schelthoff

## Analysis 1



# MATSE

**SHAKER**  
**VERLAG**

# Analysis

Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff  
Fachhochschule Aachen - Campus Jülich

27. Juni 2018



# **MATSE-Matik**

herausgegeben von  
Prof. Dr. rer. nat. Christof Schelthoff  
FH Aachen - Campus Jülich

**Christof Schelthoff**

## **Analysis 1**

6. überarbeitete Auflage

Shaker Verlag  
Aachen 2018

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2018

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-6078-2

ISSN 2197-1420

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Analysis 1</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>13</b>
1.1	Motivation . . . . .	13
1.2	Grundlagen . . . . .	14
1.2.1	Funktionen . . . . .	14
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	15
1.2.3	Verkettete Funktionen . . . . .	17
1.2.4	Reelle Funktionen . . . . .	19
1.2.5	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	20
1.2.6	Polynome . . . . .	21
1.2.7	Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	26
1.2.8	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	26
1.3	Komplexe Analysis . . . . .	31
1.3.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten . . . . .	31
1.3.2	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$ . . . . .	32
1.3.3	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen . . . . .	32
1.3.4	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>37</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	37
2.1.1	Rekursionen . . . . .	38
2.1.2	Differenzenrekursion . . . . .	41
2.1.3	Zusammenfassung . . . . .	42
2.1.4	Summen (Reihen) . . . . .	43
2.1.5	Rechenregeln für Summen . . . . .	43
2.1.6	Wichtige Summen . . . . .	44
2.1.7	Rechnen mit Summen . . . . .	48
2.2	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz . . . . .	50
2.2.1	Der Binomialkoeffizient . . . . .	50
2.2.2	Der binomische Lehrsatz . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen</b>	<b>57</b>
3.1	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	57
3.2	Konvergenz von Folgen . . . . .	64
3.2.1	Monotonie . . . . .	64
3.2.2	Konvergenz und Grenzwert einer Folge . . . . .	65
3.2.3	Rechnen mit konvergenten Folgen . . . . .	72
3.2.4	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	74
3.2.5	Konvergenz monotoner Folgen . . . . .	78
3.2.6	Die eulersche Zahl . . . . .	79
3.2.7	Konvergenz rekursiver Folgen . . . . .	82
3.2.8	Konvergenz komplexer Folgen . . . . .	86
3.2.9	Cauchy-Konvergenz . . . . .	86
3.2.10	Zusammenfassung Folgen . . . . .	88
3.3	Unendliche Reihen . . . . .	89
3.3.1	Die unendliche geometrische Reihe . . . . .	92
3.3.2	Cauchy Reihen . . . . .	93
3.3.3	Teleskopsummen und Teleskopprodukte . . . . .	96
3.3.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen	99
3.3.5	Alternierende Reihen . . . . .	109
3.3.6	Zusammenfassung Konvergenzkriterien . . . . .	112
3.3.7	Umordnung von Reihen . . . . .	113
3.3.8	Das Cauchy-Produkt . . . . .	114
3.4	Potenzreihen . . . . .	117
3.4.1	Spezielle Potenzreihen . . . . .	123
3.4.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion . . . .	124
3.5	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	132
3.5.1	Stetigkeit . . . . .	132
3.5.2	Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium . . . . .	134
3.5.3	Stetigkeit verketteter Funktionen . . . . .	137
3.5.4	Weitere Stetigkeitsuntersuchungen . . . . .	138
3.5.5	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	141
3.5.6	Unstetigkeit . . . . .	147
3.5.7	Stetigkeit auf Intervallen . . . . .	149
3.5.8	Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	151
3.5.9	Der Zwischenwertsatz . . . . .	155
3.5.10	Der Fixpunktsatz . . . . .	156
3.5.11	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ . . . . .	160
3.5.12	Die Logarithmusfunktion . . . . .	166
3.5.13	Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	167
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>171</b>
4.1	Motivation . . . . .	171
4.2	Verallgemeinerung . . . . .	175
4.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp . . . . .	177
4.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen . . . . .	180

4.3	Die Tangentengleichung . . . . .	183
4.4	Ableitungsregeln . . . . .	184
4.5	Lokale Extrema . . . . .	192
4.6	Der Mittelwertsatz . . . . .	193
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen . . . . .	196
4.8	Monotonie . . . . .	200
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital . . . . .	203
4.10	Krümmungseigenschaften . . . . .	207
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung . . . . .	208
4.12	Die Taylorreihe . . . . .	213
4.12.1	Konvergenz der Taylorreihe . . . . .	214
4.12.2	Beispiele . . . . .	214
4.12.3	Anwendung der Potenzreihen . . . . .	215
4.12.4	(*) Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen . . . . .	216
4.12.5	(*) Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten . . . . .	218
4.13	(*) Numerische Berechnung von Ableitungen . . . . .	220
4.14	(*) Das Tangentenverfahren von Newton . . . . .	222
<b>5</b>	<b>Integration</b> . . . . .	<b>227</b>
5.1	Einleitung . . . . .	227
5.1.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	235
5.1.2	Das bestimmte Integral . . . . .	236
5.1.3	(*) Die Flächenfunktion . . . . .	237
5.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion . . . . .	238
5.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$ . . . . .	246
5.1.6	Partialbruchzerlegung . . . . .	247
5.2	Flächenberechnungen . . . . .	252
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen . . . . .	253
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen . . . . .	256
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung . . . . .	257
5.6	(*) Das Restglied der Taylorreihe . . . . .	258
5.7	Längenberechnung . . . . .	261
5.8	Mantelflächenberechnung . . . . .	264
5.9	Rotationsvolumen . . . . .	266
5.10	(*) Numerische Berechnung von Integralen . . . . .	268
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen . . . . .	271
5.12	Parameterintegrale . . . . .	272
5.13	Uneigentliche Integrale . . . . .	275
5.14	Unendliche Integrationsintervalle . . . . .	276
5.15	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen . . . . .	278
5.16	Absolute Konvergenz . . . . .	280
5.17	Weitere Konvergenzkriterien . . . . .	282
5.17.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle . . . . .	282



5.17.2 Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden . . . . .	283
5.18 Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen . . . . .	287
<b>6 (*) Beweise</b>	<b>295</b>
<b>II Übungen Analysis 1</b>	<b>305</b>
<b>7 Grundlagen</b>	<b>307</b>
7.1 Mengen, Funktionen, Beweise . . . . .	307
7.2 Komplexe Analysis . . . . .	308
<b>8 Folgen und Reihen</b>	<b>309</b>
<b>9 Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen</b>	<b>315</b>
9.1 Konvergenz von Folgen . . . . .	315
9.2 Unendliche Reihen . . . . .	317
9.3 Potenzreihen . . . . .	319
9.4 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	320
<b>10 Differentialrechnung</b>	<b>323</b>
10.1 Die Taylorreihe . . . . .	324
<b>11 Integration</b>	<b>327</b>
<b>III Analysis 2</b>	<b>333</b>
<b>12 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>335</b>
12.1 Grundbegriffe . . . . .	335
12.2 Rechnen in Vektorräumen . . . . .	335
12.3 Metrische Räume . . . . .	336
12.4 Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	339
12.5 Das Skalarprodukt . . . . .	342
12.6 Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	349
12.6.1 Offene Mengen . . . . .	349
12.6.2 Abgeschlossene Mengen . . . . .	350
12.6.3 Beschränktheit und Ordnung . . . . .	350
12.7 Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	350
12.8 (*) Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	353
12.9 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	355
12.9.1 Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	355
12.9.2 Schnittfunktionen (Partielle Funktionen) . . . . .	355
12.9.3 Partielle Ableitungen . . . . .	356
12.9.4 Differentiation komplexer Zahlen . . . . .	357
12.9.5 Stetigkeit . . . . .	358

12.9.6	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit . . . . .	362
12.9.7	Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	363
12.9.8	Der Gradient . . . . .	364
12.9.9	Die Tangentialebene . . . . .	366
12.9.10	Die Richtungsableitung . . . . .	368
12.10	Das vollständige Differential . . . . .	373
12.10.1	Anwendung: Fehlerrechnung . . . . .	374
12.10.2	Der relative Fehler . . . . .	375
12.10.3	Parametrische Funktionen . . . . .	376
12.10.4	Die Kettenregel . . . . .	377
12.10.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern . . . . .	378
12.10.6	Anwendung: Implizite Differentiation . . . . .	380
12.11	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	382
12.11.1	Divergenz und Rotation . . . . .	383
12.12	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	386
12.12.1	Eindimensional . . . . .	387
12.12.2	Zweidimensional . . . . .	388
12.13	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	390
12.13.1	Der eindimensionale Fall . . . . .	390
12.13.2	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten . . . . .	391
12.13.3	Schreibweise als Hesse-Matrix . . . . .	397
12.13.4	Extremwerte im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	399
12.13.5	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten . . . . .	400
12.13.6 (*)	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen . . . . .	401
12.13.7 (*)	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End) . . . . .	403
12.13.8	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	407
12.13.9	Approximation von Funktionen . . . . .	412
12.14	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	413
12.14.1	Lagrange Multiplikatoren . . . . .	414
12.15	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	424
12.15.1	Der Tangentenvektor . . . . .	424
12.15.2	Kurvenintegrale . . . . .	425
12.15.3	Die Potentialfunktion . . . . .	432
<b>13</b>	<b>Mehrdimensionale Integration</b>	<b>437</b>
13.1	Einleitung . . . . .	437
13.2	Berechnung der Integrale . . . . .	441
13.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten . . . . .	442
13.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche . . . . .	443
13.2.3	Weitere Anwendungen . . . . .	445
13.2.4	Integration in Polarkoordinaten . . . . .	448
13.2.5	Uneigentliche Integrale . . . . .	455
13.3	Dreifachintegrale . . . . .	458
13.3.1	Schwerpunktsberechnungen . . . . .	459

<b>14 (*) Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>463</b>
14.1 Grundlagen der Evolutionsgleichungen . . . . .	463
14.1.1 Einleitung: Die Evolutionsgleichung . . . . .	464
14.1.2 Diskret oder kontinuierlich ? . . . . .	466
14.2 Ungebremstes Wachstum . . . . .	467
14.2.1 Der diskrete Fall . . . . .	467
14.2.2 Zeitteile . . . . .	468
14.2.3 Grundsätzliches . . . . .	469
14.2.4 Der Übergang zum kontinuierlichen Modell . . . . .	471
14.2.5 Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und $k_{kont}$ . . . . .	473
14.3 Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung . . . . .	475
14.4 Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung . . . . .	482
14.5 Systeme von Differenzgleichungen . . . . .	487
14.6 Zusammenfassung Wachstum und Zerfall . . . . .	489
<b>15 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>491</b>
15.1 Einleitung . . . . .	491
15.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall) . . . . .	492
15.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	498
15.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	500
15.2.1 Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$ . . . . .	501
15.2.2 Substitution . . . . .	504
15.2.3 Lineare DGL'en . . . . .	508
15.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	512
15.2.5 Die Bernoulli-Differentialgleichung . . . . .	516
15.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung . . . . .	518
15.2.7 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten . . . . .	521
15.2.8 Potenzreihenansätze . . . . .	522
15.2.9 Exakte Differentialgleichungen . . . . .	524
15.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung . . . . .	531
15.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	534
15.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	540
15.5 (*) Anwendung: Die harmonische Schwingung . . . . .	545
15.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen . . . . .	550
15.6.1 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung . . . . .	552
<b>IV Übungen Analysis 2</b>	<b>555</b>
<b>16 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>557</b>
16.1 Metrische Räume . . . . .	557
16.2 Normen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	557
16.3 Folgen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	558

16.4	Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	558
16.5	Das vollständige Differential . . . . .	559
16.6	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	560
16.7	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$ . . . . .	560
16.8	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	561
16.9	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	562
16.10	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale . . . . .	562
<b>17</b>	<b>Mehrdimensionale Integration</b>	<b>563</b>
17.1	Berechnung der Integrale . . . . .	563
<b>18</b>	<b>Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>565</b>
<b>19</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)</b>	<b>567</b>
19.1	Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung . . . . .	567
19.2	Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten . . . . .	569
19.3	DGL der Emotionen . . . . .	569