

**Schriften zur Didaktik der Mathematik und Informatik
an der Universität Salzburg**

herausgegeben von
Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Karl Josef Fuchs

Band 2

Hans-Stefan Siller

**Modellbilden –
eine zentrale Leitidee der Mathematik**

Shaker Verlag
Aachen 2008

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Universität Salzburg, Diss., 2006

Copyright Shaker Verlag 2008

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-7211-1

ISSN 1865-3855

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Zum Geleit

Modellierungsaufgaben prägen die *Neue Aufgabenkultur* [Fuchs, Blum 2008¹] im Mathematikunterricht. Der Blick richtet sich dabei nicht auf das Abrufen von Rechenverfahren bei den Schülerinnen und Schülern, sondern auf das Mathematisieren vom Auffinden von Beziehungen einzelner Größen bis hin zu Formalisierungen in Form von Funktionsausdrücken, von Gleichungen und Gleichungssystemen sowie auf das Interpretieren und Bewerten von Ergebnissen. Diese Tätigkeiten treten als wesentliche Elemente zum ‚reinen Rechnen‘ in einem experimentellen, prozessualen Unterricht hinzu.

Die Konzepte für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht sind dabei durchaus nicht neu – sie reichen gewissermaßen bis in die Anfänge einer Fachdidaktik Mathematik zurück [Wittmann 1981²] – haben jedoch im Rahmen der Diskussion über Bildungsstandards [Siller 2008³] wieder an Bedeutung gewonnen.

Die Dissertation von Mag. Dr. Hans–Stefan SILLER über die *Modellbildung – eine zentrale Leitidee der Mathematik* trifft meine Erwartungen und Anforderungen an eine wissenschaftliche Arbeit in mehrfacher Hinsicht.

Die *theoretische Seite* der Fachdidaktik wird etwa durch die Darstellungen und begründeten Bewertungen anerkannter Konzepte zur Modellierung sowie durch interessante Anregungen zur Ausdehnung der Modellierungsidee auf ‚innermathematische‘ Themen bedient.

‚Stiefkinder‘ des Mathematikunterrichts wie Stetigkeit oder Differenzen- / Differentialgleichungen erscheinen unter dem Blickwinkel der Modellierung in einem erfreulich ‚Neuen Kleid‘.

¹ FUCHS, Karl Josef (2008): *Selbständiges Lernen im Mathematikunterricht mit ‚beziehungsreichen‘ Aufgaben*. In: Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen (Thonhauser, Hrsg.), Waxmann, Münster, S. 135- 148.

² WITTMANN, Erich Ch. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.

³ SILLER, Hans – Stefan (2008): *Bildungsstandards im Fach Mathematik – Das mathematische Kompetenzmodell – eine (kompakte) Handreichung für Lehrer/innen*. ph-Salzburg, 2008

Die *schulpraktische Seite* der Fachdidaktik wird durch zahlreiche Unterrichtsbeispiele wie Extremwertaufgaben bzw. Aufgaben zum Fächerübergreifenden Unterricht abgedeckt. Zahlreich und vielfältig sind auch die methodischen – didaktischen Hinweise, die immer wieder in die Aufgaben integriert sind.

Zudem zeichnet sich die Dissertation durch eine sinnstiftende Integration des Computers durch die Verwendung geeigneter, zeitgemäßer Werkzeuge (Computer Algebra Systeme, Tabellenkalkulation und fachspezifische Modellierungssoftware DYNASYS) aus.

Die Arbeit besitzt auch ein großes Potential für weitergehende Forschung. Einem Gesichtspunkt, nämlich der *Funktionalen Modellierung im Mathematik- und Informatikunterricht*, gilt auch das Interesse von Mag. Dr. Hans–Stefan SILLER, der seit Herbst 2007 als Post-Doc an unserer Abteilung angestellt ist.

Ich bin mir sicher, dass Sie die folgende Arbeit in demselben Maß genießen werden, in dem es mir Freude bereitet hat, diese Dissertation zu betreuen und zu begutachten.

Salzburg, im Frühjahr 2008

Karl Josef Fuchs

Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik

Dissertation, Universität Salzburg, 2006

Gewidmet meinen lieben **Eltern** (Johann und Ingrid),
Großeltern (Eleonora Huber, Johann und Theresia Siller),
Schwestern (Katharina und Christina)
und meiner lieben **Gattin** Angela.

Danke für Eure unermüdliche Unterstützung!

Danksagung

Das Zustandekommen dieser Dissertation ist durch zahlreiche Anregungen, motivierende Gespräche, wertvolle Hinweise, Diskussionen, sowie kritischen Kommentaren ermöglicht worden. Aus diesem Grund möchte ich vielen Personen aus meinem näheren Umfeld danken:

Einen großen Dank möchte ich den beiden Gutachtern meiner Dissertation aussprechen, Prof. Dr. Karl Fuchs von der Paris-Lodron Universität Salzburg und Prof. Dr. Bernd Thaller von der Karl-Franzens Universität Graz. Großen Dank möchte ich insbesondere Prof. Fuchs aussprechen. Prof. Fuchs ist ein wahrer Mentor und äußerst verständnisvoller und großzügiger Förderer. Nicht zuletzt deswegen durfte ich meine Dissertation in seiner Schriftenreihe auflegen! Außerdem freut es mich ungemein, dass ich nun mein Büro (seit Okt. 2007) an der Universität Salzburg mit ihm teilen darf! Er verstand es durch zahlreiche anregende didaktische Hinweise, der Bereitschaft zur didaktischen Diskussion, hilfreiche Informationen und der nicht zuletzt ausgezeichneten persönlichen Betreuung entscheidende Verbesserungen an der Struktur der Arbeit zu bewirken. Ich hoffe, dass ich noch viele gemeinsame Projekte mit ihm erfolgreichen angehen und zu Ende bringen darf! Bei Prof. Thaller möchte ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken. Durch seine Anregungen konnte ich weitere Ergänzungen durchführen.

Großer Dank gilt vor allem aber auch meiner Familie. Ohne ihre Unterstützung hätte ich nicht den nötigen „Freiraum“ für eine solche Arbeit gehabt:

Meiner Gattin Angela, die in unzähligen Gesprächen viele Anregungen und Überlegungen einbrachte, in vielen Stunden Verbesserungen angeregt und durch ihr unermüdliches Korrekturlesen dieser Arbeit einen wesentlichen Teil zum Fertigwerden meiner Dissertation beigetragen hat.

Meinen Eltern Johann und Ingrid, die mir in Form von motivierenden Gesprächen und Hilfestellungen unterschiedlichster Art und Weise immer wieder helfend unter die Arme gegriffen haben. Durch ihr Wohlwollen und ihre Ermahnungen zur rechten Zeit, wurde der Fortgang der Arbeit entscheidend beeinflusst.

Auch bei meinen Schwestern Katharina und Christina möchte ich mich ganz herzlich für die enorm wichtige freundschaftliche Begleitung, die Hilfe in den unterschiedlichsten Bereichen und die motivierenden Worte und Unterstützung in schwierigen Zeiten bedanken.

Abschließend möchte ich mich noch bei meiner Großmutter Eleonore bedanken, die mir durch ihr stetes Interesse an der Arbeit immer wieder Freude am Weitermachen geschenkt hat und bei meinem leider verstorbenen lieben Opa, Johann, und meiner lieben Oma, Theresia, die sicher eine große Freude an dieser Arbeit hätten!

Danke Euch allen!

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	7
1. WOZU MODELLBILDUNG?	10
1.1. Modellbildung in der Schule	11
1.2. Arten der Modellbildung	13
1.2.1. Modellbildung als fundamentale Idee	13
1.2.2. Modellbildung nach Blum	15
1.2.3. Modellbildung nach Tietze, Klika, Wolpers	18
1.2.4. Modellbildung nach Weigand, Weller	21
1.2.5. Vergleich der verschiedenen Methoden	25
1.3. Verbesserung von Modellen	28
1.4. Lösen unterschiedlicher Aufgaben durch dasselbe Modell	29
1.5. Deskriptive und Normative Modelle	30
1.6. Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellbildung	30
1.7. Modellbildung bei Anwendungsaufgaben	33
1.7.1. Lösungssuche	34
1.7.2. Verschiedenen Alltagssituationen:	35
1.7.2.1. Das Auftanken eines Fahrzeuges:	36
1.7.2.2. Hubkolbenmotor:	37
2. MODELLBILDEN BEI EXTREMWERTAUFGABEN	40
2.1. Die Extremwertaufgabe	40
2.2. Modellbilden durch funktionale Beschreibung	41
2.3. Modellbildung bei Extremwertaufgaben	42
2.4. Modellbildung anhand ausgesuchter Beispiele	43
2.4.1. Das Schwimmböjenbeispiel	43
2.4.2. Interpretation von Lösungen	46
2.4.3. Die Mehrdeutigkeit einer Angabe – keine Lösung im Sinne der Fragestellung	47
2.5. Didaktische Anmerkungen	50
2.6. Berechnungen der Beispiele mit dem CAS Derive	51
2.6.1. Das Schwimmböjenbeispiel	51
2.6.2. Das Querfeldeinrennen	54
2.6.3. Das Paraboloidbeispiel	56
2.7. Modellieren einer Anwendungsaufgabe aus dem Alltag	59

3.	MODELLBILDEN IM FÄCHERÜBERGREIFENDEN UNTERRICHT	64
3.1.	Was ist fächerübergreifender Unterricht?	64
3.2.	Voraussetzungen für einen fächerübergreifenden Unterricht	66
3.3.	Modellbilden im fächerübergreifenden Unterricht	67
3.4.	Mathematik und Musik fächerübergreifend	72
3.5.	Unterrichtsbeispiele	73
3.5.1.	Stochastische Musik	78
3.5.2.	Das Weber-Fechner-Gesetz:	79
3.6.	Erfahrungen im Unterricht	82
4.	MODELLBILDEN UND STETIGKEIT	84
4.1.	Prolog	84
4.2.	Zugänge zum Stetigkeitsbegriff	85
4.2.1.	Ein physikalisches Beispiel - Federpendel	85
4.2.2.	Toleranzgrenzen	87
4.2.3.	Ein weiteres physikalisches Pendel - Fadenpendel	90
4.3.	Durchzeichenbarkeit	91
4.4.	Schwierigkeiten und andere Zugänge zum Stetigkeitsbegriff	94
4.5.	Ausblick	96
4.6.	Epilog	97
5.	MODELLE FÜR FUNKTIONEN – MODELLBILDEN MITTELS DER FUNDAMENTALEN IDEE DER APPROXIMATION ODER: WO BLEIBT DAS MODELLBILDEN BEI INNERMATHEMATISCHEN ANWENDUNGEN?	98
5.1.	Prolog	98
5.2.	Von der geometrischen Reihe zur Taylorreihe	101
5.3.	Taylorreihen	105
5.4.	Beispiele für die Taylorreihe	107
5.4.1.	Trigonometrische Funktionen	107
5.4.1.1.	Klassische Herleitung der MacLaurin-Reihe für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ an der lokalen Stelle $x = 0$	107
5.4.1.2.	Herleitung der MacLaurin-Reihe für $\tan(x)$ mit Hilfe eines graphischen Ansatzes:	111
5.4.2.	Exponentialreihe	115
5.4.3.	Binomialreihe	116
5.5.	Epilog	119

6.	MODELLBILDEN MIT HILFE VON DIFFERENZEN – UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	120
6.1.	Prolog	120
6.2.	Differenzgleichung in der Schule	121
6.3.	Differenzgleichungen	124
6.3.1.	Allgemeines	127
6.3.2.	Charakterisierung durch Typisierung:	128
6.3.2.1.	Typ $y_n = a y_{n-1} + b$	131
6.3.2.2.	Typ $y_n = a y_{n-1} + b_n$	139
6.3.2.3.	Typ $y_n = a_n y_{n-1} + b_n$	139
6.3.3.	Nicht-lineare Differenzgleichung 1. Ordnung	140
6.3.4.	Systeme von linearen Differenzgleichungen 1. Ordnung	142
6.3.5.	Homogene lineare Differenzgleichungen 2. Ordnung:	144
6.3.6.	Modellbilden mittels Differenzgleichungen	146
6.3.7.	Programme für die Modellierung von Differenzgleichungen	151
6.3.7.1.	Tabellenkalkulation	151
6.3.7.2.	Simulationssoftware	152
6.3.7.3.	CAS	152
6.3.8.	Numerische Lösung	153
6.3.8.1.	Euler-Cauchy-Verfahren	153
6.3.8.2.	Runge-Kutta-Verfahren	155
6.3.8.3.	Wann sollte man welches der beiden Verfahren anwenden	158
6.3.9.	Die Verfahren im Unterricht	159
6.4.	Differenzgleichungen - Beispiele	160
6.4.1.	Beschreibung dynamischer Systeme	162
6.4.1.1.	Modell 1: „Das exponentielle Modell“	164
6.4.1.2.	Modell 2: „Das begrenzte Modell“	169
6.4.1.3.	Modell 3: Das logistische Modell	174
6.4.1.4.	Modell 4: Projektbeispiel für einen Modellbildungsprozess	182
6.4.2.	Räuber-Beute-Modell – Vergleich EXCEL vs. DYNASYS	189
6.5.	Modellbeispiele aus der Literatur vs. Selbstmodellerte Aufgabenstellungen	198
6.6.	Ausblick	200
6.7.	Kritische Auseinandersetzung	203
6.8.	Warum soll man Differenzgleichungen im Mathematikunterricht behandeln?	204
6.9.	Differentialgleichungen	206
6.9.1.	Differentialgleichungen 1. Ordnung	206
6.9.2.	Richtungsfelder	218
6.9.3.	Separierbare Differentialgleichungen	219
6.9.4.	Unterschiede von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen	223
6.9.5.	Homogene Differentialgleichungen	224
6.9.6.	Differentialgleichungen 2.Ordnung:	225
6.9.6.1.	Allgemeines	225
6.9.6.2.	Verschiedene Modelle zu Differentialgleichungen mithilfe von dynamischen Systemen	227
6.9.6.2.1.	Fadenpendel ohne Luft – mathematischer Teil:	228
6.9.6.2.2.	Fadenpendel ohne Luft – mit DYNASYS:	230
6.9.6.2.3.	Fadenpendel mit Luft – mathematischer Teil	232
6.9.6.2.4.	Fadenpendel mit Luft – mit DYNASYS	235
6.9.6.3.	Das Federpendel:	237
6.9.6.3.1.	Federpendel ungedämpft:	237
6.9.6.3.2.	Federpendel gedämpft:	238

6.9.7. Warum Differentialgleichungen in der Schule?	239
7. LITERATURVERZEICHNIS	242
8. ABBILDUNGSVERZEICHNIS	253