Schattenpreise in der linearen Optimierung

Zur ökonomischen Interpretation
optimaler Dualvariablen
bei der Bewertung von Variationen
primaler Ressourcenkapazitäten

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr.rer.pol.)
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Hamburg

vorgelegt von

Dipl. Wirtsch.-Math. Thorsten Nieuwenhuizen

aus Steinfeld

Hamburg, den 1. Oktober 2002

Mitglieder der Promotionskommission

Vorsitzender:	Prof. Dr. K. Hansen
Erstgutachter:	Prof. Dr. H. Seelbach
Zweitgutachter:	Prof. Dr. K.-W. Hansmann

Das wissenschaftliche Gespräch fand am 4. März 2003 statt.

Berichte aus der Betriebswirtschaft

Thorsten Nieuwenhuizen

Schattenpreise in der linearen Optimierung

Zur ökonomischen Interpretation optimaler Dualvariablen bei der Bewertung von Variationen primaler Ressourcenkapazitäten

Shaker Verlag
Aachen 2003

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Nieuwenhuizen, Thorsten:
Schattenpreise in der linearen Optimierung : Zur ökonomischen Interpretation optimaler Dualvariablen bei der Bewertung von Variationen primaler Ressourcenkapazitäten / Thorsten Nieuwenhuizen.
Aachen : Shaker, 2003
(Berichte aus der Betriebswirtschaft)
Zugl.: Hamburg, Univ., Diss., 2003
ISBN 3-8322-1451-8

Printed in Germany.

ISBN 3-8322-1451-8
ISSN 0945-0696

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hamburg angenommen. Das Promotionsverfahren wurde mit dem wissenschaftlichen Gespräch am 04.03.2003 abgeschlossen. Verfaßt habe ich die Arbeit als externer Doktorand am Institut für Logistik und Transport (ILT), unterstützt u.a. durch ein zweijähriges Stipendium der Doktorandenförderung gemäß dem Hamburgischen Gesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses.

Besonders danke ich meinem Doktorvater, Prof. Dr. Horst Seelbach, für die Betreuung der Arbeit, für die Erstellung des Erstgutachtens und nicht zuletzt für die Möglichkeit, auch ohne Anstellung in enger Anbindung zum Lehrstuhl zu arbeiten. Für die Übernahme des Zweitgutachtens danke ich Prof. Dr. Karl-Werner Hansmann sowie für den Vorsitz der Prüfungskommission Prof. Dr. Klaus Hansen.

Umfangreiche Unterstützung unterschiedlichster Art ist mir von allen Mitarbeitern des ILT zuteil geworden. Für die jahrelange freundschaftliche Begleitung meiner wissenschaftlichen Tätigkeit danke ich herzlich insbesondere meinen Kollegen Dr. Wolfgang Brüggemann und Dr. Jan Dethloff sowie zudem für das Korrekturlesen früherer Versionen dieser Arbeit meinen Kollegen Dr. Kathrin Fischer und Martin Schwardt sowie meinem Freund Dr. Oliver Korn.

Zu guter letzt danke ich ganz herzlich meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Wilhelmus und Maria Nieuwenhuizen, für die uneingeschränkte und großzügige Unterstützung meiner akademischen Ausbildung.

Hamburg, den 25. März 2003

Thorsten Nieuwenhuizen

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Variablen

a	Vektor der Angebotsmengen a_i im T
A	Matrix der Koeffizienten a_{ij}
a_i	i-te Angebotsmenge im T
A_i	i-ter Angebotsort im T
a_{ij}	Beanspruchungskoeffizient von b_i durch x_j
AB'	Matrix bzw. Vektor der unteren Schranken für X im T
b	im P Vektor der Elemente b_i der primalen rechte Seite,
	im T Vektor der Nachfragemengen b_j
B	Basis(matrix)
b'	Vektor der unteren Schranken für x
$B^\star$	Optimalbasenmenge
B^k	k-te optimale Basis(matrix) bzw. k-te dual optimale Basis(matrix)
B^{-1}	Inverse der Basismatrix B
$B_D^\star$	Dualoptimalbasenmenge
b_i	Kapazität der i-ten Ressource (im PPP des i-ten Faktors)
B_I	im P Menge der Indizes i aus I, für die $y_i^\star > 0$ existiert,
	im T Menge der Indizes i aus I, für die $u_i^\star > 0$ existiert
B_I^{Bk}	im P Menge der Basisindizes von y bzgl. B^k,
	im T Menge der Basisindizes von u bzgl. B^k
b_j	j-te Nachfragemenge im T
B_j	j-ter Nachfrageort im T
B_J	im P Menge der Indizes j aus J, für die $x_j^\star > 0$ existiert,
	im T Menge der Indizes j aus J, für die $v_j^\star > 0$ existiert
B_J^{Bk}	im P Menge der Basisindizes von x bzgl. B^k,
	im T Menge der Basisindizes von v bzgl. B^k
$B_{I\times J}$	Menge der Indizes (ij) aus $I \times J$, für die $x_{ij}^\star > 0$ existiert
c	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten c_j
C	Matrix bzw. Vektor der Transportkostensätze c_{ij}
c_j	j-ter primaler Zielfunktionskoeffizient (PPP: Deckungsbeitragssatz)
c_{ij}	Kostensatz für den Transport einer ME von A_i zu B_j
d	Vektor der Angebotsschlupfvariablen d_i im T
$D^\star$	Menge der optimalen Lösungen für D
$D_z^+F(b)$	rechtsseitige Ableitung von F in b in Richtung z
$D_z^-F(b)$	linksseitige Ableitung von F in b in Richtung z

$D_{e_i}^{+}F(b)$	rechtsseitige i-te partielle Ableitung von F in b
$D_{e_i}^{-}F(b)$	linksseitige i-te partielle Ableitung von F in b
$D_{e_i}F(b)$	i-te partielle Ableitung von F in b
$DT^{\star}$	Menge der optimalen Lösungen für DT
e_i	i-ter Einheitsvektor der Länge m bzw. der Länge $m+n$ (im T)
e_j	j-ter Einheitsvektor der Länge n
E_{ij}	$(m \times n)$-Einheitsmatrix (Eins in der i-ten Zeile, j-te Spalte)
e_{m+j}	$(m+j)$-ter Einheitsvektor der Länge $m+n$
$F''(b, b')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von den Ressourcenkapazitäten b_i sowie den Elementen der rechten Seite der Nichtnegativitätsbedingungen
$F_T''(a, b, AB')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von den Angebotsmengen a_i, den Nachfragemengen b_j sowie den Elementen der rechten Seite der Nichtnegativitätsbedingungen im T
$F'(b')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von b'
$F_T'(AB')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von AB' im T
$F(b)$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von b
$f(x)$	Wert $c^T x$ der primalen Zielfunktion für x
$F_T(a, b)$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von a und b im T
GE	Geldeinheit(en)
h	Vektor der Nachfrageschlupfvariablen h_j im T
$I \times J$	Indexmenge $\{(11), \ldots, (1n), (21), \ldots, (2n), \ldots, (m1), \ldots, (mn)\}$ im T
i	Index aus I
I	Indexmenge $\{1, \ldots, m\}$
$I + J$	Indexmenge $\{1, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n\}$ im T
j	Index aus J
J	Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$
k	Index aus $\{I, II, \ldots, K\}$
K	Mächtigkeit von $B^{\star}$
K_D	Mächtigkeit von $B_D^{\star}$
KE_i	Kapazitätseinheit(en) des i-ten Rohstoffs
l	Index aus $\{I, II, \ldots, \Gamma\}$
m	im P Anzahl der primalen Nebenbedingungen, im T Anzahl der Nachfrageorte
ME	Mengeneinheit(en)
n	im P Anzahl der primalen Entscheidungsvariablen, im T Anzahl der Angebotsorte

N	Nichtbasismatrix
N_I	im P Menge der Indizes i aus I, für die $s_i^\star > 0$ existiert,
	im T Menge der Indizes i aus I, für die $d_i^\star > 0$ existiert
N_I^{Bk}	im P Menge der Nichtbasisindizes von y bzgl. B^k,
	im T Menge der Nichtbasisindizes von u bzgl. B^k
N_J	im P Menge der Indizes j aus J, für die $t_j^\star > 0$ existiert,
	im T Menge der Indizes j aus J, für die $h_j^\star > 0$ existiert
N_J^{Bk}	im P Menge der Nichtbasisindizes von x bzgl. B^k,
	im T Menge der Nichtbasisindizes von v bzgl. B^k
$N_{I\times J}$	Menge der Indizes (ij) aus $I \times J$, für die $t_{ij}^\star > 0$ existiert
o	Dimension des Vektorparameters δ_Z
p^+	Vektor der rechtsseitigen Schattenpreise p_i^+
p^-	Vektor der linksseitigen Schattenpreise p_i^-
$P^\star$	Menge der optimalen Lösungen für P
p_i^+	im P rechtsseitiger Schattenpreis für die Variation von b_i,
	im T rechtsseitiger Schattenpreis für die Variation von a_i
p_i^-	im P linksseitiger Schattenpreis für die Variation von b_i,
	im T linksseitiger Schattenpreis für die Variation von a_i
$p_i^\star$	Gesamtergebnisanteil der i-ten Ressource
p_j	Verkaufspreis pro PE_j
P_j	j-tes Produkt im PPP
p_q^+	rechtsseitiger Schattenpreis für q
p_Q^+	rechtsseitiger Schattenpreise für Q
p_q^-	linksseitiger Schattenpreis für q
p_Q^-	linksseitiger Schattenpreise für Q
p_z^+	rechtsseitiger Schattenpreis für z
p_z^-	linksseitiger Schattenpreis für z
p_{ij}^+	rechtsseitiger Schattenpreis für die Nichtnegativitätsbedingung
p_{ij}^-	linksseitiger Schattenpreis für die Nichtnegativitätsbedingung
p_{m+j}^+	im P rechtsseitiger Schattenpreis für die j-te Nichtnegativitätsbedingung,
	im T rechtsseitiger Schattenpreis von b_j
p_{m+j}^-	im P linksseitiger Schattenpreis für die j-te Nichtnegativitätsbedingung,
	im T linksseitiger Schattenpreis von b_j
PE_j	Produkteinheit(en) des j-ten Produkts
q	Variationsvektor der primalen Nichtnegativitätsbedingungen

Q	Variationsmatrix / -vektor der Nichtnegativitätsbedingungen im T
R	Matrix bzw. Vektor der Schlupfvariablen r_{ij} im DT
r_i	Beschaffungspreis pro KE_i
R_i	i-te Ressource im PPP
r_{ij}	duale Schlupfvariable im DT
s	Vektor der primalen Schlupfvariablen s_i
$S''_{(T)}$	zulässiger Parameterbereich für $F''(b,b')$ (im T für $F''_T(a,b,AB')$)
$S'_{(T)}$	zulässiger Parameterbereich für $F'(b')$ (im T für $F'_T(AB')$)
$S_{(T)}$	zulässiger Parameterbereich für $F(b)$ (im T für $F_T(a,b)$)
t	Vektor der dualen Schlupfvariablen t_j
$T^\star$	Menge der optimalen Lösungen für T
u	Vektor der dualen Entscheidungsvariablen u_i im DT
UV_{DT}	Menge der zulässigen Lösungen für DT
v	Vektor der dualen Entscheidungsvariablen v_j im DT
w_i	Bewertungssatz des i-ten primalen Faktoreinsatzes
x	Vektor der Entscheidungsvariablen x_j
X	Matrix bzw. Vektor der Transportmengen x_{ij}
x_j	j-te primale Entscheidungsvariable (im PPP j-te Produktionsmenge)
X_P	Menge der zulässigen Lösungen für P
X_T	Menge der zulässigen Lösungen für T
x_{ij}	Transportmenge von A_i zu B_j
y	Vektor der dualen Entscheidungsvariablen y_i
Y_D	Menge der zulässigen Lösungen für D
y_i^+	Hilfsvariable (positive Ausprägungen von y_i)
y_i^-	Hilfsvariable (Betrag negativer Ausprägungen von y_i)
z	Variationsvektor der primalen rechten Seite
Z	Änderungsmatrix der primalen rechten Seite bei multiparametrischer Optimierung
z_a	Variationsvektor der Angebotsmengen a_i im T
z_b	Variationsvektor der Nachfragemengen b_j im T
0	Nullvektor geeigneter Dimension

Griechische Buchstaben

α, α^{Bk}	Skalar aus dem Intervall $[0,1]$
β_{ji}	Matrixelement in der j-ten Zeile und i-ten Spalte von B^{-1}
Δ	nichtnegative Konstante aus $(0,\infty)$
δ^+	obere Grenze des Toleranzbereichs

$\delta^+(B^k)$	obere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von B^k
$\delta^+(y^\star, t^\star)$	obere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von $(y^\star, t^\star)$
$\delta^+(\pi)$	obere Grenze des kritischen Bereichs der Partition π
δ^-	untere Grenze des Toleranzbereichs
$\delta^-(B^k)$	untere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von B^k
$\delta^-(y^\star, t^\star)$	untere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von $(y^\star, t^\star)$
$\delta^-(\pi)$	untere Grenze des kritischen Bereichs der Partition π
δ_μ	Parameter für gleichzeitige Variationen von expliziten Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen, also in Richtung (z, q) im P bzw. (z_a, z_b, Q) im T
δ_i	im P Parameter für Variationen von b_i, im T Parameter für Variationen von a_i
δ_q	Parameter für Variationen der Nichtnegativitätsbedingungen in Richtung q
δ_Q	Parameter für Variationen der Nichtnegativitätsbedingungen in Richtung Q
δ_z	Parameter für Variationen von b bzw. (a, b) in Richtung z bzw. (z_a, z_b)
δ_Z	Vektorparameter für Variationen von b in Richtung Z
δ_{ij}	Parameter für die zugehörige Nichtnegativitätsbedingung
δ_{m+j}	im P Parameter für Variationen der j-ten Nichtnegativitätsbedingung, im T Parameter für Variationen von b_j
Γ	Anzahl der Ecken von Y_D
$\partial F(b)$	Super- bzw. Subdifferential von F an der Stelle b
π_I	optimale Partition der Indexmenge I
π_J	optimale Partition der Indexmenge J
$\pi_{I\times J}$	optimale Partition der Indexmenge $I \times J$ im T
π_{I+J}	optimale Partition der Indexmenge $I + J$ im T
π_I^{Bk}	Basis-Partition von I bzgl. B^k
π_J^{Bk}	Basis-Partition von J bzgl. B^k
$\sigma(x)$	Träger von x (Menge der Indizes j mit $x_j > 0$)
τ	konstanter Skalar
ϵ	beliebig kleiner Skalar

Sonderzeichen

$\exists$	es existiert
$\forall$	für alle

$\times$	kartesisches Produkt
$\emptyset$	leere Menge
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen
*	optimale Ausprägung
$^{\star S}$	streng komplementäre optimale Ausprägung
^{T}	transponiert (zeilen- und spaltenvertauscht)
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen

Abkürzungen

Ab.	Abschnitt
D	Duales zum primalen linearen Optimierungsproblem P
D'	Duales mit expliziten Schlupfvariablen
DPPP	Duales zum Produktionsprogrammplanungsproblem PPP
DT	Duales zum Transportproblem T
G	Gleichungsrestriktionen
GJP	Gauss-Jordan-Pivot
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
M	Mindestmengenrestriktionen ($\geq$-Bedingungen)
Max	Maximiere
Min	Minimiere
P	allgemeines primales lineares Optimierungsproblem
P'	Primales mit expliziten Schlupfvariablen
PPP	Produktionsprogrammplanungsproblem
T	Transportproblem
T'	Transportproblem mit expliziten Schlupfvariablen
U	Ungleichungsrestriktionen
u.d.N.	unter den Nebenbedingungen