

Schattenpreise in der linearen Optimierung

*Zur ökonomischen Interpretation
optimaler Dualvariablen
bei der Bewertung von Variationen
primärer Ressourcenkapazitäten*

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr.rer.pol.)
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Hamburg

vorgelegt von

Dipl. Wirtsch.-Math. Thorsten Nieuwenhuizen

aus Steinfeld

Hamburg, den 1. Oktober 2002

Mitglieder der Promotionskommission

Vorsitzender: Prof. Dr. K. Hansen
Erstgutachter: Prof. Dr. H. Seelbach
Zweitgutachter: Prof. Dr. K.-W. Hansmann

Das wissenschaftliche Gespräch fand am 4. März 2003 statt.

Berichte aus der Betriebswirtschaft

Thorsten Nieuwenhuizen

Schattenpreise in der linearen Optimierung

Zur ökonomischen Interpretation optimaler Dualvariablen bei der Bewertung von Variationen primaler Ressourcenkapazitäten

Shaker Verlag
Aachen 2003

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Nieuwenhuizen, Thorsten:

Schattenpreise in der linearen Optimierung: Zur ökonomischen Interpretation optimaler Dualvariablen bei der Bewertung von Variationen primaler Ressourcenkapazitäten/Thorsten Nieuwenhuizen.

Aachen: Shaker, 2003

(Berichte aus der Betriebswirtschaft)

Zugl.: Hamburg, Univ., Diss., 2003

ISBN 3-8322-1451-8

Copyright Shaker Verlag 2003

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8322-1451-8

ISSN 0945-0696

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hamburg angenommen. Das Promotionsverfahren wurde mit dem wissenschaftlichen Gespräch am 04.03.2003 abgeschlossen. Verfaßt habe ich die Arbeit als externer Doktorand am Institut für Logistik und Transport (ILT), unterstützt u.a. durch ein zweijähriges Stipendium der Doktorandenförderung gemäß dem Hamburgischen Gesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses.

Besonders danke ich meinem Doktorvater, Prof. Dr. Horst Seelbach, für die Betreuung der Arbeit, für die Erstellung des Erstgutachtens und nicht zuletzt für die Möglichkeit, auch ohne Anstellung in enger Anbindung zum Lehrstuhl zu arbeiten. Für die Übernahme des Zweitgutachtens danke ich Prof. Dr. Karl-Werner Hansmann sowie für den Vorsitz der Prüfungskommission Prof. Dr. Klaus Hansen.

Umfangreiche Unterstützung unterschiedlichster Art ist mir von allen Mitarbeitern des ILT zuteil geworden. Für die jahrelange freundschaftliche Begleitung meiner wissenschaftlichen Tätigkeit danke ich herzlich insbesondere meinen Kollegen Dr. Wolfgang Brüggemann und Dr. Jan Dethloff sowie zudem für das Korrekturlesen früherer Versionen dieser Arbeit meinen Kollegen Dr. Kathrin Fischer und Martin Schwardt sowie meinem Freund Dr. Oliver Korn.

Zu guter letzt danke ich ganz herzlich meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Wilhelmus und Maria Nieuwenhuizen, für die uneingeschränkte und großzügige Unterstützung meiner akademischen Ausbildung.

Hamburg, den 25. März 2003

Thorsten Nieuwenhuizen

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Symbolverzeichnis	V
1 Einleitung	1
1.1 Untersuchungsgegenstand: Sensitivitätsanalyse in der linearen Optimierung .	1
1.2 Problemstellung: Schattenpreise für Variationen von Ressourcenkapazitäten .	5
1.3 Vorgehensweise: Forschungsziele und Ablauf der Analyse	10
2 Dualität und Komplementarität in der linearen Optimierung	13
2.1 Primales und duales Problem	13
2.1.1 Allgemeine Form und Produktionsprogrammplanung	13
2.1.2 Transportproblem: Offene und geschlossene Formulierungen	19
2.2 Dualitätsaussagen, Komplementarität und optimale Lösungen	26
2.2.1 Starke Dualität und komplementärer Schlupf	26
2.2.2 Optimalitätsbedingungen und Lösungsverfahren	35
2.2.3 Entartung und strenge Komplementarität	40
3 Einzelne Variationen der primalen rechten Seite	51
3.1 Parametrische Sichtweise: Optimalwertfunktion	52
3.1.1 Definition und Ermittlung	52
3.1.2 Partielle Ableitungen als Schattenpreise	64

3.2	Allgemeine Sichtweise: Optimale Menge des Dualen	72
3.2.1	Optimale Dualvariablen als Schattenpreise	72
3.2.2	Darstellung mittels Komplementaritätsbedingungen	79
3.3	Klassische Sichtweise: Optimale Basen	89
3.3.1	Optimale Basislösungen des Dualen als Schattenpreise	89
3.3.2	Berechnung von Variationsgrenzen mittels nichtoptimaler Basen	97
3.4	Moderne Sichtweise: Optimale Partitionen	108
3.4.1	Definition und Ermittlung	108
3.4.2	Schattenpreise und Toleranzbereich des Variationsparameters	116
4	Simultane Variationen und ökonomische Anwendungen	128
4.1	Kumulative Schattenpreise für die ungleichungsrestringierte Form	129
4.2	Besonderheiten bei Gleichungsrestriktionen	136
4.2.1	Sensitivitätsanalyse im geschlossenen Transportproblem	136
4.2.2	Auflösung des „More-for-less“(MFL)-Paradoxons	143
4.3	Weitere Auswirkungen von Entartung auf die ökonomische Interpretation . .	156
4.3.1	Redundanz innerhalb der Modellierung und der Problemlösung	156
4.3.2	Bewertung der Gesamtergebnisanteile einzelner Ressourcen	161
5	Schlußbetrachtungen	170
5.1	Zusammenfassung: Sensitivitätsanalyse in der linearen Optimierung	171
5.2	Ausblick: Weiterführende Postoptimalitätsanalysen	179
	Literaturverzeichnis	186

Abbildungsverzeichnis

2.1	Beispiel P1: Primale Lösung	18
2.2	Beispiel P1: Duale Lösung	19
2.3	Beispiel P2: Primale Lösung	32
2.4	Beispiel P2: Duale Lösung	33
2.5	Beispiel P2: Strenge Komplementarität im Dualen	46
3.1	Beispiel P1: Optimalwertfunktion	57
3.2	Beispiel P3: Primale Lösung	58
3.3	Beispiel P3: Duale Lösung	59
3.4	Beispiel P3: Optimalwertfunktion	60
3.5	Beispiel T3: Optimalwertfunktion	63
3.6	Beispiel P3: Schattenpreise und Toleranzbereich einer Kapazitätsvariation	69
3.7	Beispiel P3: Schattenpreise und Toleranzbereich einer Mindestmengenforderung	70
3.8	Beispiel P3: Supergradienten der Optimalwertfunktion	72
3.9	Einordnung der Sensitivitätsansätze: Parametrische versus Dualitäts-Sichtweise	88
3.10	Beispiel P4: Primale Lösung	99
3.11	Beispiel P4: Kritischer Bereich optimaler Basen	101
3.12	Beispiel P4: Toleranzbereich mit Basenwechsel	105
3.13	Einordnung der Sensitivitätsansätze: Dualitäts- versus Basen-Sichtweise	107
3.14	Einordnung der Sensitivitätsansätze: Dualitäts- versus Partitions-Sichtweise	118
3.15	Beispiel P4: Kritischer Bereich der optimalen Partition	122

3.16	Beispiel P3: Kritische Bereiche benachbarter optimaler Partitionen	124
4.1	Beispiel T2: Primale Lösung	141
4.2	Beispiel T4: Primale Lösung	148
4.3	Beispiel P5: Primale Lösung	152
4.4	Beispiel P6: Primale Lösung	154
4.5	Beispiel P2: Schattenpreise versus Gesamtergebnisanteile	166
4.6	Beispiel P8: Primale Lösung	167
4.7	Beispiel P8: Schattenpreise versus Gesamtergebnisanteile	168
5.1	Einordnung der Sensitivitätsansätze: Gesamtübersicht	174

Symbolverzeichnis

Variablen

a	Vektor der Angebotsmengen a_i im T
A	Matrix der Koeffizienten a_{ij}
a_i	i -te Angebotsmenge im T
A_i	i -ter Angebotsort im T
a_{ij}	Beanspruchungskoeffizient von b_i durch x_j
AB'	Matrix bzw. Vektor der unteren Schranken für X im T
b	im P Vektor der Elemente b_i , der primalen rechte Seite, im T Vektor der Nachfragemengen b_j
B	Basis(matrix)
b'	Vektor der unteren Schranken für x
B^*	Optimalbasenmenge
B^k	k -te optimale Basis(matrix) bzw. k -te dual optimale Basis(matrix)
B^{-1}	Inverse der Basismatrix B
B_D^*	Dualoptimalbasenmenge
b_i	Kapazität der i -ten Ressource (im PPP des i -ten Faktors)
B_I	im P Menge der Indizes i aus I , für die $y_i^* > 0$ existiert, im T Menge der Indizes i aus I , für die $u_i^* > 0$ existiert
$B_I^{B^k}$	im P Menge der Basisindizes von y bzgl. B^k , im T Menge der Basisindizes von u bzgl. B^k
b_j	j -te Nachfragemenge im T
B_j	j -ter Nachfrageort im T
B_J	im P Menge der Indizes j aus J , für die $x_j^* > 0$ existiert, im T Menge der Indizes j aus J , für die $v_j^* > 0$ existiert
$B_J^{B^k}$	im P Menge der Basisindizes von x bzgl. B^k , im T Menge der Basisindizes von v bzgl. B^k
$B_{I \times J}$	Menge der Indizes (ij) aus $I \times J$, für die $x_{ij}^* > 0$ existiert
c	Vektor der Zielfunktionskoeffizienten c_j
C	Matrix bzw. Vektor der Transportkostensätze c_{ij}
c_j	j -ter primaler Zielfunktionskoeffizient (PPP: Deckungsbeitragssatz)
c_{ij}	Kostensatz für den Transport einer ME von A_i zu B_j
d	Vektor der Angebotsschlupfvariablen d_i im T
D^*	Menge der optimalen Lösungen für D
$D_z^+ F(b)$	rechtsseitige Ableitung von F in b in Richtung z
$D_z^- F(b)$	linksseitige Ableitung von F in b in Richtung z

$D_{e_i}^+ F(b)$	rechtsseitige i -te partielle Ableitung von F in b
$D_{e_i}^- F(b)$	linksseitige i -te partielle Ableitung von F in b
$D_{e_i} F(b)$	i -te partielle Ableitung von F in b
DT^*	Menge der optimalen Lösungen für DT
e_i	i -ter Einheitsvektor der Länge m bzw. der Länge $m+n$ (im T)
e_j	j -ter Einheitsvektor der Länge n
E_{ij}	$(m \times n)$ -Einheitsmatrix (Eins in der i -ten Zeile, j -te Spalte)
e_{m+j}	$(m+j)$ -ter Einheitsvektor der Länge $m+n$
$F''(b, b')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von den Ressourcenkapazitäten b_i sowie den Elementen der rechten Seite der Nichtnegativitätsbedingungen
$F_T''(a, b, AB')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von den Angebotsmengen a_i , den Nachfragemengen b_j sowie den Elementen der rechten Seite der Nichtnegativitätsbedingungen im T
$F'(b')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von b'
$F_T'(AB')$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von AB' im T
$F(b)$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von b
$f(x)$	Wert $c^T x$ der primalen Zielfunktion für x
$F_T(a, b)$	Optimalwertfunktion in Abhängigkeit von a und b im T
GE	Geldeinheit(en)
h	Vektor der Nachfrageschlupfvariablen h_j im T
$I \times J$	Indexmenge $\{(11), \dots, (1n), (21), \dots, (2n), \dots, (m1), \dots, (mm)\}$ im T
i	Index aus I
I	Indexmenge $\{1, \dots, m\}$
$I + J$	Indexmenge $\{1, \dots, m, m+1, \dots, m+n\}$ im T
j	Index aus J
J	Indexmenge $\{1, \dots, n\}$
k	Index aus $\{I, II, \dots, K\}$
K	Mächtigkeit von B^*
K_D	Mächtigkeit von B_D^*
KE_i	Kapazitätseinheit(en) des i -ten Rohstoffs
l	Index aus $\{I, II, \dots, \Gamma\}$
m	im P Anzahl der primalen Nebenbedingungen, im T Anzahl der Nachfrageorte
ME	Mengeneinheit(en)
n	im P Anzahl der primalen Entscheidungsvariablen, im T Anzahl der Angebotsorte

N	Nichtbasismatrix
N_I	im P Menge der Indizes i aus I , für die $s_i^* > 0$ existiert, im T Menge der Indizes i aus I , für die $d_i^* > 0$ existiert
$N_I^{B^k}$	im P Menge der Nichtbasisindizes von y bzgl. B^k , im T Menge der Nichtbasisindizes von u bzgl. B^k
N_J	im P Menge der Indizes j aus J , für die $t_j^* > 0$ existiert, im T Menge der Indizes j aus J , für die $h_j^* > 0$ existiert
$N_J^{B^k}$	im P Menge der Nichtbasisindizes von x bzgl. B^k , im T Menge der Nichtbasisindizes von v bzgl. B^k
$N_{I \times J}$	Menge der Indizes (ij) aus $I \times J$, für die $t_{ij}^* > 0$ existiert
o	Dimension des Vektorparameters δ_Z
p^+	Vektor der rechtsseitigen Schattenpreise p_i^+
p^-	Vektor der linksseitigen Schattenpreise p_i^-
P^*	Menge der optimalen Lösungen für P
p_i^+	im P rechtsseitiger Schattenpreis für die Variation von b_i , im T rechtsseitiger Schattenpreis für die Variation von a_i
p_i^-	im P linksseitiger Schattenpreis für die Variation von b_i , im T linksseitiger Schattenpreis für die Variation von a_i
p_i^*	Gesamtergebnisanteil der i -ten Ressource
p_j	Verkaufspreis pro PE_j
P_j	j -tes Produkt im PPP
p_q^+	rechtsseitiger Schattenpreis für q
p_Q^+	rechtsseitiger Schattenpreise für Q
p_q^-	linksseitiger Schattenpreis für q
p_Q^-	linksseitiger Schattenpreise für Q
p_z^+	rechtsseitiger Schattenpreis für z
p_z^-	linksseitiger Schattenpreis für z
p_{ij}^+	rechtsseitiger Schattenpreis für die Nichtnegativitätsbedingung
p_{ij}^-	linksseitiger Schattenpreis für die Nichtnegativitätsbedingung
p_{m+j}^+	im P rechtsseitiger Schattenpreis für die j -te Nichtnegativitätsbedingung, im T rechtsseitiger Schattenpreis von b_j
p_{m+j}	im P linksseitiger Schattenpreis für die j -te Nichtnegativitätsbedingung, im T linksseitiger Schattenpreis von b_j
PE_j	Produkteinheit(en) des j -ten Produkts
q	Variationsvektor der primalen Nichtnegativitätsbedingungen

Q	Variationsmatrix / -vektor der Nichtnegativitätsbedingungen im T
R	Matrix bzw. Vektor der Schlupfvariablen r_{ij} im DT
r_i	Beschaffungspreis pro KE_i
R_i	i -te Ressource im PPP
r_{ij}	duale Schlupfvariable im DT
s	Vektor der primalen Schlupfvariablen s_i
$S''(T)$	zulässiger Parameterbereich für $F''(b, b')$ (im T für $F''_T(a, b, AB')$)
$S'(T)$	zulässiger Parameterbereich für $F'(b')$ (im T für $F'_T(AB')$)
$S(T)$	zulässiger Parameterbereich für $F(b)$ (im T für $F_T(a, b)$)
t	Vektor der dualen Schlupfvariablen t_j
T^*	Menge der optimalen Lösungen für T
u	Vektor der dualen Entscheidungsvariablen u_i im DT
UV_{DT}	Menge der zulässigen Lösungen für DT
v	Vektor der dualen Entscheidungsvariablen v_j im DT
w_i	Bewertungssatz des i -ten primalen Faktoreinsatzes
x	Vektor der Entscheidungsvariablen x_j
X	Matrix bzw. Vektor der Transportmengen x_{ij}
x_j	j -te primale Entscheidungsvariable (im PPP j -te Produktionsmenge)
X_P	Menge der zulässigen Lösungen für P
X_T	Menge der zulässigen Lösungen für T
x_{ij}	Transportmenge von A_i zu B_j
y	Vektor der dualen Entscheidungsvariablen y_i
Y_D	Menge der zulässigen Lösungen für D
y_i^+	Hilfsvariable (positive Ausprägungen von y_i)
y_i^-	Hilfsvariable (Betrag negativer Ausprägungen von y_i)
z	Variationsvektor der primalen rechten Seite
Z	Änderungsmatrix der primalen rechten Seite bei multiparametrischer Optimierung
z_a	Variationsvektor der Angebotsmengen a_i im T
z_b	Variationsvektor der Nachfragemengen b_j im T
0	Nullvektor geeigneter Dimension

Griechische Buchstaben

α, α^{Bk}	Skalar aus dem Intervall $[0, 1]$
β_{ji}	Matrixelement in der j -ten Zeile und i -ten Spalte von B^{-1}
Δ	nichtnegative Konstante aus $(0, \infty)$
δ^+	obere Grenze des Toleranzbereichs

$\delta^+(B^k)$	obere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von B^k
$\delta^+(y^*, t^*)$	obere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von (y^*, t^*)
$\delta^+(\pi)$	obere Grenze des kritischen Bereichs der Partition π
δ^-	untere Grenze des Toleranzbereichs
$\delta^-(B^k)$	untere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von B^k
$\delta^-(y^*, t^*)$	untere Grenze des kritischen Bereichs der Optimalität von (y^*, t^*)
$\delta^-(\pi)$	untere Grenze des kritischen Bereichs der Partition π
δ_μ	Parameter für gleichzeitige Variationen von expliziten Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen, also in Richtung (z, q) im P bzw. (z_a, z_b, Q) im T
δ_i	im P Parameter für Variationen von b_i , im T Parameter für Variationen von a_i
δ_q	Parameter für Variationen der Nichtnegativitätsbedingungen in Richtung q
δ_Q	Parameter für Variationen der Nichtnegativitätsbedingungen in Richtung Q
δ_z	Parameter für Variationen von b bzw. (a, b) in Richtung z bzw. (z_a, z_b)
δ_Z	Vektorparameter für Variationen von b in Richtung Z
δ_{ij}	Parameter für die zugehörige Nichtnegativitätsbedingung
δ_{m+j}	im P Parameter für Variationen der j -ten Nichtnegativitätsbedingung, im T Parameter für Variationen von b_j
Γ	Anzahl der Ecken von Y_D
$\partial F(b)$	Super- bzw. Subdifferential von F an der Stelle b
π_I	optimale Partition der Indexmenge I
π_J	optimale Partition der Indexmenge J
$\pi_{I \times J}$	optimale Partition der Indexmenge $I \times J$ im T
π_{I+J}	optimale Partition der Indexmenge $I + J$ im T
$\pi_I^{B^k}$	Basis-Partition von I bzgl. B^k
$\pi_J^{B^k}$	Basis-Partition von J bzgl. B^k
$\sigma(x)$	Träger von x (Menge der Indizes j mit $x_j > 0$)
τ	konstanter Skalar
ϵ	beliebig kleiner Skalar

Sonderzeichen

\exists	es existiert
\forall	für alle

\times	kartesisches Produkt
\emptyset	leere Menge
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen
*	optimale Ausprägung
*S	streng komplementäre optimale Ausprägung
T	transponiert (zeilen- und spaltenvertauscht)
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

Abkürzungen

Ab.	Abschnitt
D	Duales zum primalen linearen Optimierungsproblem P
D'	Duales mit expliziten Schlupfvariablen
DPPP	Duales zum Produktionsprogrammplanungsproblem PPP
DT	Duales zum Transportproblem T
G	Gleichungsrestriktionen
GJP	Gauss-Jordan-Pivot
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
M	Mindestmengenrestriktionen (\geq -Bedingungen)
Max	Maximiere
Min	Minimiere
P	allgemeines primales lineares Optimierungsproblem
P'	Primales mit expliziten Schlupfvariablen
PPP	Produktionsprogrammplanungsproblem
T	Transportproblem
T'	Transportproblem mit expliziten Schlupfvariablen
U	Ungleichungsrestriktionen
u.d.N.	unter den Nebenbedingungen