Berichte aus der Informatik

**Peter Ackermann
Volkmar große Rebel
Gerhard Rosenberger**

**Algebraische Strukturen und universelle Algebren
für Informatiker**

Shaker Verlag
Aachen 2004

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2004

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 3-8322-2757-1

ISSN 0945-0807

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Für unsere Fußballvereine

Borussia Dortmund

SV Werder Bremen

Hamburger Sportverein

Vorwort

Die vorliegende Einführung in die Algebraischen Strukturen und Universellen Algebren für Informatiker ist eine korrigierte und erweiterte Fassung des Buches “Lineare Algebra und algebraische Strukturen für Informatiker” von Dirk Hennig, Alexandra Nolte, Gerhard Rosenberger und Martin Scheer, insbesondere wurde ein Kapitel über Universelle Algebren hinzugefügt. Sie eignet sich hervorragend für Studienanfänger der Informatik im ersten/zweiten Semester, ist aber auch als begleitendes Buch für höhere Semester sehr zu empfehlen.

Das Buch entstand im Rahmen einer regelmäßig stattfindenden Vorlesung an der Universität Dortmund und wird dort regelmäßig als eine der Grundlagen für die Mathematikausbildung für Informatiker verwendet.

Es liegt in der Natur der Sache, dass das Kapitel 18 über Universelle Algebren theoretischer ist als die vorherigen. Jedoch haben wir versucht, Konzepte aus den vorherigen Kapiteln in diesen allgemeineren Zusammenhang einzuordnen. Aufwendige Beweise wurden zum Teil weggelassen, insbesondere dort, wo sie nicht unbedingt zum Verständnis beitragen.

Besonderer Dank für Ihre tatkräftige Unterstützung gilt folgenden Personen: Michael Abshoff, Dr. Dirk Hennig, Lorita Jahn, Stefan Kühling, Alexandra Nolte und Dr. Martin Scheer.

Wir danken außerdem unseren Fußballvereinen Borussia Dortmund, dem SV Werder Bremen und dem Hamburger Sportverein für die notwendige, zeitweise Ablenkung vom Arbeiten an diesem Buch.

Dieses Buch ist mit $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ unter Zuhilfenahme von Xfig gesetzt worden, so dass wir hoffen können, ein für die Leser ansprechendes Buch erarbeitet zu haben. Wir freuen uns über Anregungen und Hinweise der Leser.

Dortmund, im April 2004

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1	Elemente der Logik	5
1.1	Existenz- und Allquantoren	11
1.2	Axiomatik und vollständige Induktion	14
2	Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen	20
2.1	Mengenoperationen	22
2.2	Darstellungsmöglichkeiten von Relationen: bei endlichen Mengen	31
2.3	Produkt von Relationen	33
2.4	Die inverse Relation	34
2.5	Spezielle Klassen von Relationen	35
2.6	Mehr über Abbildungen	40
3	Teilbarkeit im Bereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$	43
3.1	Primzahlen und Teilbarkeit in $\mathbb{N}$	43
3.2	Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$	46
3.3	Das kleinste gemeinsame Vielfache	49
4	Halbgruppen und Gruppen	50
5	Ideale in Halbgruppen und Kongruenzen	76
5.1	Halbgruppenkonstruktionen	83
6	Zykl./freie Halbgruppen/Gruppen, dir. Produkte	87
6.1	Freie Halbgruppen und freie Monoide	88
6.2	Freie Gruppen	93
6.3	Freie abelsche Halbgruppen, direkte Produkte	96
7	Ringe und Körper	99
7.1	Polynomringe	102
7.2	Strukturverträgliche Abbildungen, Ideale, Faktorringe	108
7.3	Idealerzeugung	111
7.4	Körper	116
7.5	Der Polynomring $K[t]$ für einen Körper K	118
7.6	Das Minimalpolynom von a über K	125
8	Vektorräume	127
9	Lineare Abbildungen und Matrizen	143
9.1	Zuordnung lin. Abb. – Matrizen	144
9.2	Verknüpfungen bei Matrizen	148
9.3	Rangbestimmung und Rangnormalform	153
9.4	Berechnung der Inversen einer Matrix	156

9.5	Basiswechsel	158
10	Lineare Gleichungssysteme	160
11	Der Körper der komplexen Zahlen	164
11.1	Geometr. Veranschaulichung im kart. Koordinatensystem (Gauß-Ebene)	165
12	Determinanten	170
12.1	Determinantenberechnung	174
12.2	Anwendung für lineare Gleichungssysteme	179
13	Eigenwerte	181
13.1	Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren	184
14	Das Skalarprodukt	190
14.1	Eigenschaften des Skalarproduktes	190
14.2	Anwendungen des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^2$	193
14.3	Winkel im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$	197
14.4	Pythagoreische Zahlentripel	199
15	Ordnungsstrukturen und Boolesche Verbände	203
15.1	Verbände	210
15.2	Konstruktion von Booleschen Verbänden mittels 0 – 1-Folgen	226
16	Kombinatorik	230
16.1	Abzählende Kombinatorik	233
16.2	Multinomialkoeffizienten	238
16.3	Partitionen	239
16.4	Ordnung endlicher Mengen, Formel vom Ein- und Ausschließen	245
16.5	Erzeugende Funktionen	251
16.6	Die erzeugende Funktion für die Stirlingschen Zahlen $S(n, k)$ 2. Art	258
17	Graphentheorie	259
17.1	Einiges über gerichtete Graphen oder Digraphen	280
17.2	Bewertete Graphen	284
18	Einführung in die universelle Algebra	292
18.1	Relationen und Abbildungen	292
18.1.1	Mengen, Relationen	292
18.1.2	Abbildungen	295
18.2	Universelle Algebren	302
18.2.1	Ω -Algebren und -Homomorphismen	302
18.2.2	Homomorphie- und Isomorphiesätze	313

18.3 Hüllensysteme	321
18.3.1 Grundbegriffe der Ordnungstheorie	321
18.3.2 Hüllensysteme	326
18.3.3 Algebraische Hüllensysteme	332
Index	336