

# **Simulation und messtechnische Erfassung von Ultraschall in Medien mit Dämpfung gemäß allgemeinem Frequenzpotenzgesetz**

Der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

zur Erlangung des Grades

**DOKTOR - INGENIEUR**

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Ludwig Bahr

Erlangen 2008

Als Dissertation genehmigt von  
der Technischen Fakultät der  
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 13. Mai 2008  
Tag der Promotion: 29. Juli 2008  
Dekan: Prof. Dr.-Ing. habil. Johannes Huber  
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Reinhard Lerch  
Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Ermert

Berichte aus der Akustik

**Ludwig Bahr**

**Simulation und messtechnische Erfassung von  
Ultraschall in Medien mit Dämpfung gemäß  
allgemeinem Frequenzpotenzgesetz**

D 29 (Diss. Universität Erlangen-Nürnberg)

Shaker Verlag  
Aachen 2008

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Erlangen-Nürnberg, Univ., Diss., 2008

Copyright Shaker Verlag 2008

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-7689-8

ISSN 1611-1303

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

---

# Vorwort

Auf das Studium der Elektrotechnik an der Technischen Universität München folgend hat mich mein Weg zur Promotion an den Lehrstuhl für Sensorik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg geführt. Das vorliegende Werk entstand in der Zeit, in der ich als wissenschaftlicher Assistent mit Lehrverpflichtung beschäftigt war. Nach dem erfolgreichen Abschluss mit Dissertation und Rigorosum möchte ich die Gelegenheit nutzen und meinem Doktorvater Reinhard Lerch für die fortwährende Unterstützung über die Dauer der Arbeit und die Übernahme des Erstgutachtens danken. Ebenso gilt mein Dank Helmut Ermert, der ohne ein Zögern das Zweitgutachten übernommen hat.

Am Gelingen der Arbeit trug zu einem großen Teil die kollegiale Arbeitsatmosphäre am Lehrstuhl bei. So konnten auch noch spätabends in lockerer Runde Gedanken ausgetauscht und eigene Denkansätze ins Leben gerufen und vorangetrieben werden. Allen meinen Kollegen danke ich herzlichst, dass sie mir diese Gunst so uneigennützig gewährten. Insbesondere möchte ich hier Manfred Kaltenbacher nennen, der stets ein offenes Ohr für Problemstellungen der Simulation im allgemeinen und im speziellen mit der Methode der finiten Elementen hatte und mir mit Rat und Tat zur Seite stand.

Wissenschaftliche Arbeit gründet bekanntlich nicht nur in der Darstellung der eigenen Errungenschaften, sondern auch in der Aufarbeitung des Status quo und der damit verbundenen Offenlegung aller Quellen und Einflüsse, von denen man profitierte. Bevor ich selbst diesen letzten Schritt gehen konnte, hat mir die Korrespondenz mit Kendall R. Waters, Thomas L. Szabo, Luise Blank, Guy V. Norton und Volker Wilkens erlaubt, offene Fragen bezüglich ihrer Publikationen zu klären und mein Verständnis zu vertiefen. Ihre Arbeiten galten mir als Maßstab für mein eigenes Schaffen. Marc Kachelrieß hat mir nicht nur in seiner Vorlesung, sondern auch in einer Reihe privater Gespräche, die tomographische Rekonstruktion nahe gebracht, wofür ich ihm noch danken möchte.

Gotthard Babel danke ich herzlich für das Korrekturlesen der Endversion, so dass auch die letzten Rechtschreibfehler ausgemerzt werden konnten. Verbliebene Schnitzer gehen auf die Kappe des Autors. Und zum guten Schluß wäre dieses Vorhaben der Promotion nicht zu seinem Ende gelangt, wenn nicht meine Eltern, Franz und Elisabeth Bahr, bis zum heutigen Tage unbedingt zu mir gestanden wären. Mögen Sie diese Arbeit als Bestätigung sehen.

Erlangen im Oktober 2008

Ludwig Bahr



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen</b>	<b>vii</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Themenumfeld	1
1.2 Problemstellung	2
1.3 Stand der Technik	4
1.3.1 Simulationsverfahren mit Frequenzpotenzgesetz-Dämpfung	4
1.3.2 Messtechnik für Stoffe mit Frequenzpotenzgesetz-Dämpfung	5
1.4 Lösungsansatz	7
1.5 Gliederung der Arbeit	8
<b>2 Grundlagen der akustischen Wellenausbreitung</b>	<b>10</b>
2.1 Herleitung der Wellengleichung	10
2.2 Zusammenhang zwischen Dämpfung und Dispersion	13
2.3 Darstellung der Differentialgleichung mit fraktionaler Ableitung	17
<b>3 Schallfeldberechnung mit finiten Elementen</b>	<b>19</b>
3.1 Diskrete Approximation einer fraktionalen Ableitung	19
3.1.1 Grünwald-Letnikov-Algorithmus	19
3.1.2 Kollokation mit Splines	21
3.1.3 Reduktion des Rechenaufwands	22
3.2 FE-Lösung im Zeitbereich	23
3.3 Numerische Fehler der FE-Lösung	27
3.4 Verifizierung in einer Raumdimension	29
3.4.1 Lineare ebene Wellenausbreitung	29
3.4.2 Nichtlineare ebene Wellenausbreitung	31
3.5 FE-Lösung im Frequenzbereich	36
3.5.1 Randbedingungen für Freifeldabstrahlung	37
3.6 Verifizierung in zwei Raumdimensionen	38
3.7 Diskussion der Ergebnisse	41
<b>4 Bestimmung der Materialparameter</b>	<b>43</b>
4.1 Messprinzip der Einfügemethode	43
4.2 Messaufbau und -ergebnisse	46
4.3 Sensitivität der Schallfeldsimulation auf die Parameter	49
4.4 Diskussion der Ergebnisse	52

<b>5 Schallabsorption und Wärmeleitung</b>	<b>53</b>
5.1 Der akustische Wärmequellterm . . . . .	53
5.2 FE-Lösung der Wärmeleitung im Zeitbereich . . . . .	58
5.3 Experimentelle Verifizierung der Simulation . . . . .	59
5.3.1 Messung der Erwärmung mit einer Thermokamera . . . . .	61
5.3.2 Messung der Oberflächengeschwindigkeit des Schallwandlers . . . . .	63
5.3.3 Simulation der Erwärmung durch Ultraschall . . . . .	66
5.4 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	68
<b>6 Refraktometrische Tomographie</b>	<b>70</b>
6.1 Messprinzip . . . . .	70
6.2 Rekonstruktion des Schallfeldes mittels Tomographie . . . . .	74
6.2.1 Rekonstruktionsalgorithmen . . . . .	74
6.2.2 Rekonstruktion von simulierten Schallfelddaten . . . . .	78
6.2.3 Rekonstruktion eines gleichverteilten Rauschsignals . . . . .	83
6.3 Messaufbau der refraktometrischen Tomographie . . . . .	84
6.4 Vergleich mit Hydrophonmessungen in Wasser . . . . .	85
6.5 Messung in anderen transparenten Medien . . . . .	88
6.6 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	90
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>92</b>
7.1 Schallfeldsimulation . . . . .	92
7.2 Messtechnik . . . . .	93
7.3 Ausblick . . . . .	94
<b>Anhang</b>	<b>96</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

---

# Formelzeichen

## Lateinische Buchstaben

$a$	Radius eines Ultraschallwandlers
$B/A$	Nichtlinearitätsparameter in der Akustik
$c$	Ausbreitungsgeschwindigkeit
$c_0$	Phasengeschwindigkeit bezogen auf eine Referenzfrequenz $f_0$
$c_v$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$\mathbf{C}$	Dämpfungsmatrix der semidiskreten Galerkin-Formulierung
$[C_{ab}]$	Elementdämpfungsmatrix mit Zeilenindex $a$ und Spaltenindex $b$
$E$	spezifische Ausstrahlung
$f$	Frequenz
$f_m$	Mittenfrequenz eines Pulssignals
$h$	Gitterweite
$h_c$	Wärmeübertragungskoeffizient
$h_\infty$	Faltungskern
$\mathbf{I}$	Schallintensität
$\mathbf{I}_a$	akustischer Energieflussdichtevektor
$j = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
$J_n$	Besselfunktion $n$ -ter Ordnung
$k = \beta + j\alpha$	Wellenzahl mit Phasenkoeffizient $\beta$ und Dämpfungskoeffizient $\alpha$
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix der semidiskreten Galerkin-Formulierung
$[K_{ab}]$	Elementsteifigkeitsmatrix mit Zeilenindex $a$ und Spaltenindex $b$
$L$	optischer Weg eines Lichtstrahls
$\mathbf{M}$	Massenmatrix der semidiskreten Galerkin-Formulierung
$[M_{ab}]$	Elementmassenmatrix mit Zeilenindex $a$ und Spaltenindex $b$
$n$	Brechungsindex
$n_{ed}$	Anzahl der Freiheitsgrade je Element
$n_{el}$	Anzahl der Elemente im Rechenggebiet
$n_{en}$	Anzahl der Knoten je Element
$n_{eq}$	Anzahl der Unbekannten im Rechenggebiet
$\mathbf{n}$	Einheitsvektor der Oberflächennormalen
$(\partial n / \partial p)_S$	piezooptischer Koeffizient
$N = a^2 / \lambda$	Nahfeldlänge bei Wandlerradius $a$ und Wellenlänge $\lambda$
$N_a, N_b, N_c$	Basis-/Ansatzfunktion
$p_0$	Ruhedruck
$p', p$	Schalldruck
$q$	akustische Wärmequellichte in der Wärmeleitung
$q_n$	nichtlineare Quellichte in der akustischen Wellenausbreitung
$Q$	akustische Wärmeleistung
$r$	Reflexionsfaktor

$S = \partial V$	Rand des Rechengebiets
$t$	Transmissionsfaktor
$T$	Temperatur
$u$	Testfunktion in der schwachen Formulierung
$U$	Spannung
$\mathbf{v}_0$	Grundströmung
$\mathbf{v}', \mathbf{v}$	Schallschnelle
$V$	Rechengebiet ohne Rand
$w_a$	akustische Energiedichte
$w_k$	Gewichtsfaktor in gewichteter Summe
$\bar{x}$	Schockformationsabstand bei verlustloser ebener Ausbreitung
$y$	Parameter im Dämpfungsmodell mit Frequenzpotenzgesetz
$Z_0$	Schallkennimpedanz

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Dämpfungskoeffizient
$\alpha_a$	Amplitudenabsorptionskoeffizient
$\alpha_s$	Amplitudenstreckkoeffizient
$\alpha_0$	Parameter im Dämpfungsmodell mit Frequenzpotenzgesetz
$\beta = \omega/c(\omega)$	Phasenkoeffizient
$\beta'$	relativer Phasenkoeffizient
$\beta_n = 1 + \frac{B}{2A}$	Nichtlinearitätskoeffizient in der Akustik
$\beta_H$	erster Integrationsparameter im Newmark-Zeitschrittsschema
$\gamma_H$	zweiter Integrationsparameter im Newmark-Zeitschrittsschema
$\gamma = -\alpha + j\beta$	Ausbreitungskonstante
$\gamma' = -\alpha + j\beta'$	relative Ausbreitungskonstante
$\Gamma$	Eulersche Gammafunktion
$\kappa$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda$	Wellenlänge
$\nu$	relative Dispersion
$\rho = \rho_0 + \rho'$	Dichte
$\rho_0$	Ruhedichte
$\rho'$	Wechseldichte
$\rho_L$	Lagrangesche Dichte
$\sigma = x/\bar{x}$	auf Schockformationsabstand normierte Ortskoordinate $x$
$\sigma_{sb}$	Stefan-Boltzmann-Konstante
$\tau = t - x/c_0$	verzögerte Zeitbasis
$\phi$	Geschwindigkeits-/Schnellepotential
$\underline{\phi}$	Lösungsvektor des Schnellepotentials
$\underline{\omega} = 2\pi f$	Kreisfrequenz

---

**Transformationen und Operatoren**

${}_{\text{RL}}D^q$	fraktionale Ableitung der Ordnung $q$ nach Riemann und Liouville
${}_C D^q$	fraktionale Ableitung der Ordnung $q$ nach Caputo
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation
$\mathcal{H}$	Hilbert-Transformation
$\mathcal{H}_0$	Hankel-Transformation Nullter Ordnung
Im	Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\mathcal{L}_a$	linearer Operator zu Dämpfung und Dispersion
Re	Realteil einer komplexen Zahl



---

# Kurzfassung

## Schlagwörter:

Ultraschall, Frequenzpotenzgesetz, Schalldämpfung, Finite-Elemente-Methode, Absorption, Erwärmung durch Ultraschall, Interferometer, Computer-Tomographie

Die Ausbreitung von Ultraschallwellen findet bei vielen Applikationen, wie der Ultraschall-Spektroskopie, der Sonografie, der Ultraschallchirurgie und der Lithotripsie, in Medien statt, in denen sich die Schalldämpfung nicht mit thermoviskosen Verlusten beschreiben lässt. Im Entwicklungsprozess der Geräte werden vielfach computergestützte Simulationsverfahren eingesetzt. Fehlbeschreibungen der Schalldämpfung können allerdings zu merklichen Abweichungen in simulierten Signalverläufen des Schallfeldes führen.

Als Ziel der Arbeit wurde deswegen angesetzt, Methoden für Forschung und Entwicklung zur Verfügung zu stellen, welche die spektralen Eigenschaften von Dämpfung und Schallgeschwindigkeit wirklichkeitstreu abbilden. Zur Beschreibung der Schalldämpfung wurde ein Frequenzpotenzgesetz-Ansatz gewählt, mit dessen Hilfe auch das dispersive Verhalten der Schallgeschwindigkeit einheitlich über die Kramers-Kronig-Beziehungen beschrieben werden kann. Die Legitimität des Ansatzes im Rahmen der in der Literatur bekannten Modelle wurde diskutiert.

Darauf aufbauend wurde ein Simulationsprogramm auf Basis der Finite-Elemente-Methode entwickelt, welches Simulationen der Schallausbreitung mit Frequenzpotenzgesetz-Dämpfung im Zeit- und Frequenzbereich erlaubt. In der Zeitbereichssimulation konnte darüberhinaus der nichtlineare Zusammenhang von Druck und Dichte, der zu einer fortschreitenden Aufsteilung der Schallwelle über den Ausbreitungsweg führt, berücksichtigt werden. Die erzielbare Rechengenauigkeit wurde in drei Szenarien der Schallausbreitung geprüft.

Mit einem spezialisierten Kopplungsverfahren wurde aus der dissipierten Schallenergie der Zeitverlauf der Wärmeübertragung im Ausbreitungsmedium berechnet, wobei im Ansatz explizit keine geometrischen Vereinfachungen getroffen wurden. Das Schallfeld wurde hierbei unter Voraussetzung von quasi-kontinuierlicher Anregung im Frequenzbereich gelöst. Die Gültigkeit der Simulationsmethode für praktische Anwendungen konnte durch Messungen mit einer Thermokamera bestätigt werden.

Um Simulationen der Schallausbreitung in Medien mit Frequenzpotenzgesetz-Dämpfung direkt mit gemessenen Schalldruckverteilungen vergleichen zu können, wurde ein neuartiges optisches Messverfahren entwickelt, welches für flüssige und feste transparente Medien eingesetzt werden kann. Es wertet den optischen Weg eines Laserstrahls mit Hilfe eines Interferometers aus; der Schalldruck wird orts- und zeitaufgelöst mit tomographischen Algorithmen rekonstruiert. Aus simulierten Schallfelddaten konnten synthetische Messdaten generiert werden, um so die tomographische Rekonstruktion zu testen und um die für Detailtreue notwendige Ortsabtastung zu ermitteln. Exemplarisch für Stoffe mit genanntem Dämpfungsverhalten wurden Schalldruckmessungen in einem Plexiglasblock durchgeführt.

---

# Abstract

## Keywords:

ultrasound, frequency power law, damping, finite element method, absorption, ultrasonic heating, laser interferometry, computed tomography

In a lot of ultrasonic applications, e. g. ultrasound attenuation spectroscopy, sonography, focused ultrasonic surgery and lithotripsy, the loss of sound energy in wave propagation cannot be described by thermoviscous principles. Computer simulation is widely used in developing such devices, however incorrectly predicting the spectral dependence of attenuation in sound field simulations can lead to large errors.

The goal of this thesis has been to provide methods for research and development, which incorporate the spectral characteristics of attenuation and propagation velocity found in the respective media. Therefore, a frequency power law ansatz was chosen for attenuation, values for the propagation velocity were derived from the ansatz using the Kramers-Kronig dispersion relations. The legitimacy of the ansatz was discussed.

On the basis of the partial differential equations, a finite element code was developed, which facilitates the simulation of linear sound propagation with frequency power law losses in the time and frequency domain. Furthermore, the nonlinear relation between pressure and density, which leads to a progressive steepening of the waves along the propagation path, can also be included in simulations in the time domain. The numerical accuracy of the tool is evaluated in three case studies.

With the help of a specialized coupling scheme, we calculated the dissipated sound energy in a continuous wave sound field analysis and used the results as excitation in a transient heat conduction simulation. In the derivation of the heat source term, no geometrical simplifications were undertaken. The validity of the method was proved in a laboratory setting utilizing an infrared imaging device to measure the temperature elevation.

A novel optical measurement technique was developed to detect the sound pressure distribution in media with frequency power law losses, hence sound field simulations could be directly compared to measurement data. It is based on evaluating the optical path length of a laser beam by means of an interferometer; space and time resolved values of the sound pressure are reconstructed by tomographic algorithms. Measurements can be performed in liquid and solid media as long as they are transparent to laser light. The performance of different tomographic algorithms and the spatial sampling, which is necessary to reconstruct all details of a sound field, were investigated by means of synthetic data sets. They were calculated from sound field simulations and resembled the measurement signals received by the interferometer. Finally, we conducted sound pressure measurements in a Plexiglas cube, exemplifying solid materials with frequency power law losses.