

**Ein einheitliches Konzept verallgemeinerter Kontinua
mit Mikrostruktur**

Vom Fachbereich Mechanik der
Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung der *venia legendi*
für das Fach Mechanik
genehmigte Habilitationsschrift

von

Dr.-Ing. Carlo Sansour
geb. in Bethlehem

**Ein einheitliches Konzept verallgemeinerter Kontinua
mit Mikrostruktur**

Vom Fachbereich Mechanik der
Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung der *venia legendi*
für das Fach Mechanik
genehmigte Habilitationsschrift

von

Dr.-Ing. Carlo Sansour
geb. in Bethlehem

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. P. Wriggers
Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. F.G. Kollmann

Tag der Habilitation: 9. Juli 1997

Publikationsreihe des Fachgebiets Maschinenelemente und
Maschinenakustik der Technischen Universität Darmstadt

Band 2/99

Carlo Sansour

**Ein einheitliches Konzept verallgemeinerter
Kontinua mit Mikrostruktur unter besonderer
Berücksichtigung der finiten Viskoplastizität**

D 17 (Habil.-Schr. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Aachen 1999

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Sansour, Carlo:

Ein einheitliches Konzept verallgemeinerter Kontinua mit Mikrostruktur unter besonderer Berücksichtigung der finiten Viskoplastizität/ Carlo Sansour.

- Als Ms. gedr. -

Aachen: Shaker, 1999

(Publikationsreihe des Fachgebiets Maschinenelemente und
Maschinenakustik der Technischen Universität Darmstadt; Bd. 99,2)

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Habil.-Schr., 1999

ISBN 3-8265-6703-X

Copyright Shaker Verlag 1999

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISBN 3-8265-6703-X

ISSN 1435-4292

Shaker Verlag GmbH • Postfach 1290 • 52013 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • eMail: info@shaker.de

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet für Maschinenelemente und Maschinenakustik der Technischen Universität Darmstadt im Rahmen des Sonderforschungsbereichs "Deformation und Versagen von metallischen und granularen Strukturen".

Obwohl das Fachgebiet innerhalb des Fachbereiches Maschinenbau angesiedelt ist, beschäftigte ich mich im Rahmen des Sonderforschungsbereichs mit Themen, die dem Fach Mechanik zuzuordnen sind. Gleiches gilt für diese Schrift. Die Tatsache, daßes an der Universität Darmstadt eine eigenständige Fakultät für Mechanik gibt, in der deutschen universitären Landschaft eher die Ausnahme, motivierte mich nun, die Habilitation innerhalb dieses Fachbereiches anzustreben. Den Professoren des Fachbereiches Mechanik, die dieses ermöglicht haben, bin ich daher zu Dank verpflichtet.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.-Ing. P. Wriggers für seine Förderung und wohlwollende Unterstützung. Seine Aufgeschlossenheit und sein offener Geist, hat vieles erst möglich gemacht. Er übernahm das Hauptreferat.

Besonders zu Dank verpflichtet bin ich dem Koreferenten Herrn Prof.Dr.-Ing.Dr.-Ing.E.h. F.G. Kollmann, dem Leiter des Fachgebietes Maschinenelemente und Maschinenakustik. Ohne die Freiräume, die er mir gewährte, wäre diese Schrift so nicht möglich gewesen. Er unterstützte meine Arbeit und begleitete sie stets mit großem Interesse. Die Gespräche mit ihm, oft auch über das Fachliche hinausgehend, haben wesentlich zu einer angenehmen und anregenden Atmosphäre am Fachgebiet beigetragen.

Herrn Prof. Dr.-Ing O.T. Bruhns danke ich ebenfalls für die übernahme eines Koreferats. Seinem unermüdlichen Einsatz in Deutschland für das Fach Mechanik und seiner Förderung junger Wissenschaftler gebührt Bewunderung.

Carlo Sansour

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Theorie verallgemeinerter Kontinua vorgelegt, die sowohl das klassische Kontinuum als auch bisherige Modelle wie das Cosserat und das mikromorphe Kontinuum unter einem einheitlichen Schirm zusammenfaßt. Das allgemeine Kontinuum weist unendlich viele Freiheitsgrade auf.

Die Beschränkung auf endlich viele Freiheitsgrade führt zu speziellen Theorien, deren Konzeption problemorientiert ist. Eine besondere Eigenschaft des neuen Konzepts verallgemeinerter Kontinua ist die Unabhängigkeit vom gewählten Stoffgesetz. So können z.B. konstitutive Modelle der finiten Viskoplastizität vom vereinheitlichten Typ ohne weiteres berücksichtigt werden, was bisher als kaum möglich erachtet wurde.

Das neue Konzept verallgemeinerter Kontinua kann ebenfalls eingesetzt werden, um sowohl Dimensionsreduktion (Herleitung von Schalen- und Stabmodellen) als auch um Dimensionserweiterung (Einführung von inneren Längen) systematisch zu erreichen.

Bekanntlich stellen die Rotationen die erweiterten Freiheitsgrade dar, die das Cosserat Kontinuum charakterisieren. Diese spielen bereits bei einem klassischen Kontinuum eine besondere Rolle, die auch bei verallgemeinerten Kontinua voll zum Tragen kommt. Daher werden sich die ersten Kapitel der Arbeit mit dem Konzept des klassischen Kontinuums und der Rolle der Rotationen befassen, bevor über verallgemeinerte Kontinua gesprochen wird.

Es wird gezeigt, daß die Rotationen stets (auch bei klassischen Kontinua) als unabhängige Freiheitsgrade betrachtet werden können. Die Aussage ist auch deshalb wichtig, weil sie die Zerlegung des Strecktensors als Basis für eine Theorie der finiten Inelastizität nahe legt. Ausführlich werden insgesamt vier mögliche Strecktensorzerlegungen diskutiert. Insbesondere wird gezeigt, daß vollständige Theorien auch auf der Basis von Zerlegungen des räumlichen Strecktensors entwickelt werden können.

Dieselben Ideen, die eine richtige Behandlung von räumlichen Strecktensoren erlauben, führen auch zur Klärung von zwei weiteren wichtigen offenen Fragen. Zum einen wird die Frage der Anisotropie in der Momentankonfiguration aufgeworfen und behandelt. Zum anderen wird die Frage der passenden Wahl einer objektiven Ableitung, für welche Evolutionsgleichungen formuliert werden sollen, ebenfalls geklärt. Es wird gezeigt, daß sich in Anwesenheit von Anisotropie die Form der konstitutiven Beziehungen ändert, wenn räumliche Tensoren als die primären Spannungs- und Verzerrungsgrößen betrachtet werden. Beachtet man solche Modifikationen, so gelingt es, die Anisotropie in der Momentankonfiguration richtig zu erfassen. Es kommt ein Hauptgedanke zum Tragen: nichtobjektive Anteile verändern über das Stoffgesetz die Form einer der beiden Gleichgewichtsbedingungen. So ist entweder die Form des Kräftegleichgewichts oder die des Momentengleichgewichts entsprechend zu modifizieren. Was übrig bleibt, ist dann eine objektive Ableitung, für welche Evolutionsgleichungen formuliert werden. Die Feststellung ist also wesentlich, daß die benötigten objektiven Ableitungen nicht gewählt, sondern berechnet werden müssen.

Die Ergebnisse, die für klassische Kontinua gewonnen worden sind, gelten auch für verallgemeinerte Kontinua. Von großem Wert ist die Feststellung, daß Invarianz der Verzerrungsmaße nur bezüglich der orthogonalen Gruppe gefordert werden muß. Die Erweiterung solcher Invarianzforderungen auf andere Lie Gruppen kann zu Verzerrungsmaßen führen, die nicht sinnvolle Gleichgewichtsbeziehungen nach sich ziehen. Diese Ideen werden anhand des

Beispiels mikromorpher Kontinua nach Eringen und Kafadar verdeutlicht.

Die Anwendbarkeit der in der Arbeit dargelegten Konzepte wird anhand von vier verschiedenen Fällen aufgezeigt, begleitet von numerischen Berechnungen. Eine Membrantheorie finiter Verzerrungen unter Einschluß der Rotationen als unabhängige Variable, Finite Viskoplastizität basierend auf Strecktensorzerlegungen, Schalentheorie über das Modell einer Cosserat Fläche und Schalen als mikromorphe Flächen unter Einschluß finiter viskoplastischer Verzerrungen stellen die Anwendungsgebiete dar.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Wesentliche Elemente der Transformationsgruppen	7
2.1	Transformationsgruppen und die Exponentialabbildung	7
2.2	Tangenten und die Lie Algebra	9
2.3	Zeitliche Ableitungen und Variationen	11
3	Anisotropie und hyperelastische Stoffgleichungen	13
3.1	Notation und wesentliche geometrische Relationen	13
3.2	Hyperelastische Beziehungen. Eine erste Diskussion	15
3.3	Ein erster Weg zur Erfassung materieller Anisotropie	17
3.4	Anisotropie in der Momentankonfiguration	19
3.4.1	Verwendung des Strecktensors \mathbf{V}^s	20
3.4.2	Eine alternative Herleitung	23
3.4.3	Verwendung des linken Cauchy-Green Tensors	24
4	Das Rotationsfeld als unabhängige Variable	27
4.1	Nichtsymmetrische Strecktensoren	27
4.2	Zur Zerlegung des Deformationsgradienten	31
5	Elasto-Viskoplastizität basierend auf Strecktensorzerlegungen	33
5.1	Allgemeines	33
5.2	Die multiplikative Zerlegung von \mathbf{U}	35
5.2.1	Erste Zerlegung des materiellen Strecktensors	35
5.2.2	Zweite Zerlegung des materiellen Strecktensors	39

5.3	Die multiplikative Zerlegung von \mathbf{V}	41
5.3.1	Erste Zerlegung des räumlichen Strecktensors	41
5.3.2	Zweite Zerlegung des räumlichen Strecktensors	44
5.3.3	Ein elastisches Verzerrungsmaß vom linken Cauchy-Green-Typ	45
5.4	Bemerkungen zum Fall der induzierten Anisotropie	46
6	Das Cosserat Kontinuum. Eine erste Formulierung	49
6.1	Die Verzerrungsmaße	49
6.2	Gleichgewichtsbedingungen	50
6.3	Der elastische Fall. Die Lagrange Funktion	50
6.4	Der elastisch-viskoplastische Fall	53
6.4.1	Multiplikative-additive Zerlegung der Verzerrungsmaße	53
6.4.2	Positive Dissipation und Fließregeln	54
6.4.3	Diskussion	55
7	Eine einheitliche Theorie verallgemeinerter Kontinua	57
7.1	Erste Diskussion mikromorpher Kontinua nach Eringen	57
7.2	Verallgemeinerung des Begriffs der Mikrodeformation	59
7.3	Strecktensoren im Mikrobereich	61
7.4	Gleichgewichtsbedingungen	63
7.5	Theorien finiter Verzerrungen - Hyperelastizität und Viskoplastizität	64
7.5.1	Hyperelastizität	64
7.5.2	Finite Viskoplastizität	66
7.6	Diskussion	68
7.7	Bemerkungen zu einigen geometrischen Konzepten	68
7.7.1	Zur Struktur der Konfigurationsräume	69
7.7.2	Das externe Potential	69
7.7.3	Kompatibilitätsbedingungen und Spannungsfunktionen	70
8	Anwendungsbeispiele und numerische Berechnungen	71
8.1	Ein hyperelastisches Membran	71
8.2	Viskoplastizität basierend auf Strecktensorzerlegungen	75

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	III
8.3 Die Schale als ein zweidimensionales Cosserat Kontinuum	77
8.4 Die Schale als ein zweidimensionales mikromorphes Kontinuum	78
8.4.1 Kinematik und Verzerrungsmaße	78
8.4.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeiten und konstitutive Gleichungen . .	80
8.4.3 Elastische Berechnung	81
8.4.4 Viskoplastische Berechnung	84
Literatur	87