

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Lehrstuhl für Baumechanik

Überlagerung von Grundlösungen in der Elastodynamik zur Behandlung der dynamischen Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion

Georg Frühe

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. O. Fischer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. G. H. Müller
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. St. A. Savidis,
Technische Universität Berlin

Die Dissertation wurde am 30.09.2010 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 03.02.2011 angenommen.

Schriftenreihe des Lehrstuhls für Baumechanik

Band 6

Georg Frühe

**Überlagerung von Grundlösungen in der
Elastodynamik zur Behandlung der dynamischen
Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion**

Shaker Verlag
Aachen 2011

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: München, Techn. Univ., Diss., 2011

Copyright Shaker Verlag 2011

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-9999-6

ISSN 1864-1806

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Kurzfassung

Für die dynamische Berechnung einer Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion wird in dieser Arbeit die Finite-Elemente-Methode (FEM) mit der Integraltransformationemethode (ITM) gekoppelt. Durch die Überlagerung von Fundamentallösungen der ITM (Halbraum, Vollraum mit zylindrischem Hohlraum, Vollraum mit sphärischem Hohlraum) wird eine semi-analytische Lösung im Wellenzahl-Frequenzraum für einen Halbraum mit zylindrischen und kugelförmigen Hohlräumen, länglichen Gräben und örtlich begrenzten Gruben entwickelt. Daraus resultieren die wellenzahlabhängigen Nachgiebigkeiten an den Oberflächen. Indem diese Nachgiebigkeiten mit der FEM gekoppelt werden, können beliebige und komplexe Strukturen des Tunnels bzw. des Grabens und der Gebäude modelliert werden. Dies ermöglicht es nun, am vollständigen Emissions-Transmissions-Immissions-System Erschütterungsprognosen durchzuführen.

Abstract

For the dynamic calculation of a tunnel-soil-structure-interaction in this paper the Finite Element Method (FEM) is coupled with the Integral Transform Method (ITM). By superposing fundamental solutions of the ITM (half-space, full space with cylindrical cavity, full space with spherical cavity), a semi-analytical solution in the frequency-wave number domain for a half-space with cylindrical and spherical cavities, longitudinal trenches and localized excavations is derived, which results in wave number flexibilities obtained at the boundaries. By coupling these flexibilities with the FEM arbitrary and complex structures of the tunnel respectively trench and the building can be modelled. Thus it is now possible to carry out predictions of vibrations for the complete Emission-Transmission-Immission-System.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2004 bis 2010 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Müller für die fachliche Betreuung, sowie für das freundliche und menschliche Miteinander, welches das Arbeitsklima am Lehrstuhl für Baumechanik bestimmt.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. St. A. Savidis danke ich für die Übernahme des Korreferates und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. O. Fischer für die Übernahme des Vorsitzes des Verfahrens.

Bei meinen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl möchte ich mich für die kollegiale, angenehme und familiäre Arbeitsatmosphäre, sowie für ihre Hilfe und Gesprächsbereitschaft herzlich bedanken. Insbesondere danke ich Herrn Dipl.-Ing. S. Seipelt für die vielen und interessanten fachlichen Diskussionen, die meine Arbeit sehr bereichert haben.

Meinem Bruder Thomas danke ich für seine Anregungen und seine Hilfsbereitschaft.

Bei meiner Freundin Sanne bedanke ich mich für ihr Verständnis und ihre Unterstützung. Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, für die Förderung meiner Ausbildung, ihre stete Unterstützung und den starken Rückhalt, den sie mir immer gewähren.

München, im Februar 2011

Georg Frühe

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Vorgehen	1
1.2 Überblick	2
1.3 Gliederung	5
2 Grundgleichungen der linearen räumlichen Elastizitätstheorie	7
2.1 Vorbemerkungen	7
2.2 Lamésche Gleichung	7
2.3 Satz von Helmholtz	9
3 Der Halbraum unter dynamischer Belastung	11
3.1 Lösung der Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten	11
3.2 Verschiebungen und Spannungen in kartesischen Koordinaten	13
3.3 Lösung für den homogenen Halbraum	16
3.4 Lösung für den geschichteten Halbraum	17
3.5 Bewegte Lasten	19
4 Der Vollraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung	20
4.1 Lösung der Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten	20
4.1.1 Allgemeine Grundlagen	20
4.1.2 Lösung der Wellengleichung - Variante 1	23
4.1.3 Lösung der Wellengleichung - Variante 2	28
4.2 Verschiebungen und Spannungen in Zylinderkoordinaten	33

4.3	Lösung für den homogenen Vollraum mit zylindrischem Hohlraum	36
5	Der Vollraum mit sphärischem Hohlraum unter dynamischer Belastung	38
5.1	Vorbemerkungen	38
5.2	Lösung der Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten	39
5.2.1	Allgemeine Grundlagen	39
5.2.2	Lösung der Wellengleichung	41
5.3	Verschiebungen und Spannungen in Kugelkoordinaten	47
5.4	Lösung für den homogenen Vollraum mit sphärischem Hohlraum	50
5.5	Berechnungsbeispiele	54
6	Superposition der Grundlösungen der Fundamentalsysteme	57
6.1	Vorbemerkungen	57
6.2	Transformationsbeziehungen zwischen den Koordinatensystemen	59
6.3	Superposition der Lösung des Halbraums und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum	60
6.3.1	Tunnel im Halbraum unter dynamischer Belastung	60
6.3.2	Graben an der Halbraumoberfläche unter dynamischer Belastung	65
6.3.3	Tunnel in einer Schichtgrenze unter dynamischer Belastung	67
6.4	Superposition der Lösung des Halbraums und des Vollraums mit sphärischem Hohlraum	69
6.5	Weitere Überlagerungsmöglichkeiten	70
6.6	Numerische Umsetzung	74
6.6.1	Numerische Fourierreihenentwicklung	74
6.6.2	Numerische sphärische Fourierreihenentwicklung	76
6.7	Berücksichtigung der Effekte von Fern- und Nahfeldern	78
6.8	Einfluss der Tunneltiefe	82
6.9	Vergleichsberechnungen	86
7	Finite-Elemente-Methode im fouriertransformierten Raum	91
7.1	Vorbemerkungen	91
7.2	Grundlegende Beziehungen des linearen Dreieckelementes	91
7.3	Herleitung der dynamischen Elementsteifigkeitsmatrix	95

7.4	Dynamische Gesamtsteifigkeitsmatrix des FE-Systems	99
8	Kopplung der FEM mit der Integraltransformationmethode	100
8.1	Vorbemerkungen	100
8.2	Transformation der Freiheitsgrade des FE-Systems	101
8.3	Kopplung	104
9	Zusammenfassung	109
A	Anhang	111
A.1	Mathematische Funktionen	112
A.1.1	Bessel-Funktionen	112
A.1.2	Sphärische Bessel-Funktionen	114
A.1.3	Legendre-Funktionen	115
A.1.4	Assoziierte Legendre-Funktionen	118
A.1.5	Normierte assoziierte Legendre-Funktionen	121
A.2	Fouriertransformation	123
A.2.1	Definition	123
A.2.2	Rechenvorschriften	123
A.3	Bestimmungsmatrizen für Zylinderkoordinaten	126
A.3.1	Matrix $\hat{\mathbf{H}}_z$ zur Ermittlung der Verschiebungen	126
A.3.2	Matrix $\hat{\mathbf{K}}_z$ zur Ermittlung der Spannungen	128
A.4	Bestimmungsmatrizen für Kugelkoordinaten	131
A.4.1	Matrix $\hat{\mathbf{H}}_s$ zur Ermittlung der Verschiebungen	131
A.4.2	Matrix $\hat{\mathbf{K}}_s$ zur Ermittlung der Spannungen	133
A.5	Spannungstransformationsmatrizen	139
A.6	Steifigkeits- und Massenmatrix eines Dreieckselementes	140
	Abbildungsverzeichnis	143
	Literaturverzeichnis	147

Symbolverzeichnis

Griechische Buchstaben

α_n	Koeffizient des n -ten Reihengliedes einer Fourierreihe
β_i^{j0}	Matrix für eine Transformation von kartesischen in krummlinige Koordinaten
β_i^{j0}	Matrix für eine Transformation von kartesischen in normierte krumml. Koordinaten
$\beta_i^{j'}$	Matrix für eine Transformation von krumml. in normierte krumml. Koordinaten
δW	virtuelle Arbeit des Gesamtsystems
δW_a	äußere virtuelle Arbeit
δW_i	innere virtuelle Arbeit
δW_T	virtuelle Arbeit infolge von Trägheit
ϵ	Abbruchkonstante
ϵ^{ij}	Koeffizienten des Verzerrungstensors
ϵ^{ijk}	Permutationssymbol
ϵ_k	Vektor der Verzerrungen (ϵ_{xx} ϵ_{yy} ϵ_{zz} ϵ_{xy} ϵ_{zy} ϵ_{zx}) in kartesischen Koordinaten
ϵ_s	Vektor der Verzerrungen (ϵ_{RR} $\epsilon_{\vartheta\vartheta}$ $\epsilon_{\varphi\varphi}$ $\epsilon_{R\vartheta}$ $\epsilon_{R\varphi}$ $\epsilon_{\vartheta\varphi}$) in Kugelkoordinaten
ϵ_z	Vektor der Verzerrungen (ϵ_{xx} ϵ_{rr} $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ϵ_{rx} $\epsilon_{r\varphi}$ $\epsilon_{x\varphi}$) in Zylinderkoordinaten
ϵ_Δ	Vektor der Verzerrungen (ϵ_{xx} ϵ_{yy} ϵ_{zz} τ_{xy} τ_{zy} τ_{zx}) im Dreieckselement
ζ	Verlustfaktor
η_i	Flächenkoordinaten des Dreieckelementes
θ_i	Koordinaten eines normierten krummlinigen Koordinatensystems
θ_i'	Koordinaten eines krummlinigen Koordinatensystems
ϑ_i	zugehöriger Winkel der Stützstellen der Gauß-Legendre-Quadratur
λ_1, λ_2	Koeffizienten zur Bestimmung der Potentiale in kartesischen Koordinaten

λ_p	Kompressionswellenlänge
λ_s	Scherwellenlänge
λ	Lamésche Konstante
μ	Lamésche Konstante
ν	Poissonzahl (Querdehnzahl)
ρ	Dichte des Materials
σ^{ij}	Koeffizienten des Spannungstensors
$\sigma_{zi,s}$	Einheitsspannungszustand an Halbraumboberfläche
$\sigma_{zi,s}^{(rj,n)}$	resultierende Spannung an fiktiver Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{rj,n}$
$\sigma_{zi,so}^{(Rk,lm)}$	resultierende Spannung an fiktiver Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$\sigma_{rj,n}$	Einheitsspannungszustand an zylindrischer Hohlraumoberfläche
$\sigma_{rj,n}^{(zi,s)}$	resultierende Spannung an fiktiver zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,s}$
$\sigma_{rj,no}^{(Rk,lm)}$	resultierende Spannung an fiktiver zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$\sigma_{Rk,lm}$	Einheitsspannungszustand an kugelförmiger Hohlraumoberfläche
$\sigma_{Rk,lm}^{(zi,so)}$	resultierende Spannung an fiktiver kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,so}$
$\sigma_{Rk,lm}^{(rj,no)}$	resultierende Spannung an fiktiver kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{rj,no}$
$\sigma_{\mathbf{k}}$	Vektor der Spannungen (σ_{xx} σ_{yy} σ_{zz} σ_{xy} σ_{zy} σ_{zx}) in kartesischen Koordinaten
$\sigma_{\mathbf{s}}$	Vektor der Spannungen (σ_{RR} $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ $\sigma_{\varphi\varphi}$ $\sigma_{R\vartheta}$ $\sigma_{R\varphi}$ $\sigma_{\vartheta\varphi}$) in Kugelkoordinaten
$\sigma_{\mathbf{z}}$	Vektor der Spannungen (σ_{xx} σ_{rr} $\sigma_{\varphi\varphi}$ σ_{rx} $\sigma_{r\varphi}$ $\sigma_{x\varphi}$) in Zylinderkoordinaten
φ	Umfangswinkel in Zylinderkoordinaten
φ, ϑ	Breitenkreis- und Längenkreiswinkel in Kugelkoordinaten
ψ, χ	Skalarfunktionen
ω	Eigenkreisfrequenz
Γ_{α}	Oberfläche des Halbraums
Γ_{β}	Oberfläche des zylindrischen Hohlraums
Γ_{γ}	Oberfläche des kugelförmigen Hohlraums
Γ_{δ}	Schichtgrenze
$\Pi_{\mathbf{k}}$	Vektor der Potentiale (Φ Ψ_x Ψ_y) in kartesischen Koordinaten
$\Pi_{\mathbf{s}}$	Vektor der Skalarfunktionen (Φ ψ χ) in Kugelkoordinaten
$\Pi_{\mathbf{z}}$	Vektor der Skalarfunktionen (Φ ψ χ) in Zylinderkoordinaten

Φ	skalares Potential
Ψ_i	vektorielle Potentiale

Lateinische Buchstaben

a_i	Hilfsgrößen im Dreieckselement
$a_l(\vartheta_i)$	Funktionswert an der Stützstelle ϑ_i für l -tes Reihenglied bezüglich φ
$a_{l,m}$	Koeffizienten der Reihe von Kugelflächenfunktionen
b_y	Breite der Last in y -Richtung
c_i	Unbekannte zur Bestimmung der Verschiebungen im Dreieckselement
c_p	Wellengeschwindigkeit der Kompressionswelle
c_s	Wellengeschwindigkeit der Scherwelle
c_R	Wellengeschwindigkeit der Rayleighwelle
\mathbf{c}_Δ	Vektor der Unbekannten (c_1 - c_9)
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
f	Frequenz
f_E	Tiefe der kugelförmigen Einsenkung
f_G	Tiefe des Grabens
$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$	Basisvektoren eines normierten krummlinigen Koordinatensystems
$\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2', \mathbf{g}_3'$	Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems
g^{ij}	Metrikoeffizienten
h_s	Schichtdicke im geschichteten Halbraum
h	Überdeckung des Tunnels
i	Index für kartesische Koordinaten x, y, z
j	Index für Zylinderkoordinaten x, r, φ
k	Index für Kugelkoordinaten R, ϑ, φ
k_p	Wellenzahl der Kompressionswelle
k_r	radiale Wellenzahl
k_s	Wellenzahl der Scherwelle
k_L	Wellenzahl der angreifenden Last
k_R	Wellenzahl der Rayleighwelle

k_x, k_y	Wellenzahlen in kartesischen Koordinaten
$\Delta k_x, \Delta k_y$	Grundwellenzahlen in kartesischen Koordinaten
k_α, k_β	Koeffizienten zur Bestimmung der Potentiale in Zylinderkoordinaten
\tilde{k}_p, \tilde{k}_s	Koeffizienten zur Bestimmung der Potentiale in Kugelkoordinaten
l, m	Reihenglied der Kugelflächenfunktion
n	Reihenglied in Umfangsrichtung in Zylinderkoordinaten
o	Reihenglied in x -Richtung in kartesischen und Zylinderkoordinaten
p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}	Belastung an der Halbraumboberfläche
$p_{rx}, p_{rr}, p_{r\varphi}$	Belastung an der zylindrischen Hohlraumboberfläche
$p_{RR}, p_{R\theta}, p_{R\varphi}$	Belastung an der kugelförmigen Hohlraumboberfläche
r	radiale Koordinate in Zylinderkoordinaten
r_0	Radius des zylindrischen Hohlraums
r_p	Radius der Lastfläche
s	Reihenglied in y -Richtung in kartesischen Koordinaten
s	Schichtnummer im geschichteten Halbraum
t	Zeit
u, v, w	Verschiebung im Dreieckselement in x -, y - und z -Richtung
u_x, u_y, u_z	Verschiebungen in kartesischen Koordinaten
u_x, u_r, u_φ	Verschiebungen in Zylinderkoordinaten
u_R, u_θ, u_φ	Verschiebungen in Kugelkoordinaten
u_{R,K_i}	Verschiebungen der Knoten des FE-Systems
$u_{z_i,s}^{(z_i,s)}$	resultierende Verschiebung an Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{z_i,s}$
$u_{z_i,n}^{(r_j,n)}$	resultierende Verschiebung an Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{r_j,n}$
$u_{z_i,so}^{(Rk,lm)}$	resultierende Verschiebung an Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$u_{r_j,n}^{(z_i,s)}$	result. Verschiebung an zylindrischer Hohlraumboberfläche infolge $\sigma_{z_i,s}$
$u_{r_j,n}^{(r_j,n)}$	result. Verschiebung an zylindrischer Hohlraumboberfläche infolge $\sigma_{r_j,n}$
$u_{r_j,no}^{(Rk,lm)}$	result. Verschiebung an zylindrischer Hohlraumboberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$u_{Rk,lm}^{(z_i,so)}$	result. Verschiebung an kugelförmiger Hohlraumboberfläche infolge $\sigma_{z_i,so}$
$u_{Rk,lm}^{(r_j,no)}$	result. Verschiebung an kugelförmiger Hohlraumboberfläche infolge $\sigma_{r_j,no}$
$u_{Rk,lm}^{(Rk,lm)}$	result. Verschiebung an kugelförmiger Hohlraumboberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
\mathbf{u}_k	Vektor der Verschiebungen ($u_x \ u_y \ u_z$) in kartesischen Koordinaten

\mathbf{u}_s	Vektor der Verschiebungen (u_R u_θ u_φ) in Kugelkoordinaten
\mathbf{u}_z	Vektor der Verschiebungen (u_x u_r u_φ) in Zylinderkoordinaten
\mathbf{u}_{FE}	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade des FE-Systems
\mathbf{u}_{ITM}	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade des ITM-Systems
$\mathbf{u}_{\Omega_{FE}}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade innerhalb des FE-Gebietes
$\mathbf{u}_{\Gamma_{FE}}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade am Kopplungsrand des FE-Systems
$\mathbf{u}_{\Gamma_{ITM}}$	Vektor der transformierten Verschiebungsfreiheitsgrade des FE-Systems
$\mathbf{u}_{\Gamma_\alpha}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade an der Halbraumoberfläche
$\mathbf{u}_{\Gamma_\beta}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade an der zylindr. Hohlraumoberfläche
\mathbf{u}_Δ	Vektor der Verschiebungen (u v w) im Dreieckselement
$\mathbf{u}_{\Delta k}$	Vektor der Verschiebungen der Knotenpunkte des Dreieckselementes
v	Geschwindigkeit
v_t	Spurgeschwindigkeit
w_i	Wichtungswerte für Gauß-Legendre-Quadratur
x	Längskoordinate in Zylinderkoordinaten
x, y, z	kartesische Koordinaten
A	Admittanz
A_D	Dreiecksfläche
\mathbf{A}_k	Matrix zur Berechnung der Potentiale $\mathbf{\Pi}_k$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_k
\mathbf{A}_s	Matrix zur Berechnung der Potentiale $\mathbf{\Pi}_s$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_s
\mathbf{A}_z	Matrix zur Berechnung der Potentiale $\mathbf{\Pi}_z$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_z
\mathbf{A}_Δ	Matrix zur Berechnung der Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta k}$ aus Unbekannten \mathbf{C}_Δ
A_1, A_2	Maß für Amplitude der Kompressionswelle in kartesischen Koordinaten
B_{i1}, B_{i2}	Maß für Amplitude der Scherwelle in kartesischen Koordinaten
B_x	Wiederholungslänge in x -Richtung
B_y	Wiederholungslänge in y -Richtung
\mathbf{B}_Δ	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta k}$
C_{in}	Maß für Amplitude der Kompressions- und Scherwellen in Zylinderkoordinaten
C_{ilm}	Maß für Amplitude der Kompressions- und Scherwellen in Kugelkoordinaten
$C_{zi,s}$	Amplituden der Einheitslastfälle an der Halbraumoberfläche

$C_{r_j,n}$	Amplituden der Einheitslastfälle an der zylindrischen Hohlraumoberfläche
$C_{Rk,lm}$	Amplituden der Einheitslastfälle an der kugelförmigen Hohlraumoberfläche
C	Vektor der Lastamplituden des überlagerten ITM-Systems
C_k	Vektor der Unbekannten ($A_1 A_2 B_{x1} B_{x2} B_{y1} B_{y2}$) in kartes. Koordinaten
C_s	Vektor der Unbekannten ($C_{1lm}-C_{6lm}$) in Kugelkoordinaten
C_z	Vektor der Unbekannten ($C_{1n}-C_{6n}$) in Zylinderkoordinaten
C_{sch}	Vektor der Unbekannten ($\bar{A}_{1,s} A_{2,s} \bar{B}_{x1,s} B_{x2,s} \bar{B}_{y1,s} B_{y2,s}$) einer Schicht
C_{HR}	Vektor der Unbekannten ($C_{1lm} C_{2lm} C_{3lm}$) für die Last P_{HR}
C_{LR}	Vektor der Unbekannten ($C_{1n} C_{2n} C_{3n}$) für die Last P_{LR}
C_{OF}	Vektor der Unbekannten ($A_2 B_{x2} B_{y2}$) für die Last P_{OF}
D	Lehrsches Dämpfungsmaß
D_k	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_k aus den Potentialen Π_k
D_s	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_s aus den Potentialen Π_s
D_z	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_z aus den Potentialen Π_z
E	Elastizitätsmodul
E_k	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_k aus den Verzerrungen ϵ_k
E_s	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_s aus den Verzerrungen ϵ_s
E_z	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_z aus den Verzerrungen ϵ_z
E_Δ	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_Δ aus den Verzerrungen ϵ_Δ
F, G	Hilfsgrößen für Schubspannungen in Kugelkoordinaten
G	Schubmodul
H_k	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_k aus den den Unbekannten C_k
H_s	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_s aus den den Unbekannten C_s
H_z	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_z aus den den Unbekannten C_z
H_Δ	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen u_Δ aus den den Unbekannten C_Δ
K_k	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_k aus den Unbekannten C_k
K_s	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_s aus den Unbekannten C_s
K_z	Matrix zur Berechnung der Spannungen σ_z aus den Unbekannten C_z
K_{HR}	Matrix zur Berechnung der Last P_{HR} aus den Unbekannten C_{HR}
K_{LR}	Matrix zur Berechnung der Last P_{LR} aus den Unbekannten C_{LR}
K_{OF}	Matrix zur Berechnung der Last P_{OF} aus den Unbekannten C_{OF}

\mathbf{K}_{dyn}	dynamische Steifigkeitsmatrix des FE-Systems
\mathbf{K}_{ITM}	dynamische Steifigkeitsmatrix des gesamten überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}, \mathbf{K}_{\alpha\beta},$ $\mathbf{K}_{\beta\alpha}, \mathbf{K}_{\beta\beta}$	Elemente der dynamischen Steifigkeitsmatrix des ITM-Systems
$\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}, \mathbf{K}_{\Gamma\Omega},$ $\mathbf{K}_{\Omega\Gamma}, \mathbf{K}_{\Omega\Omega}$	Elemente der dynamischen Steifigkeitsmatrix des FE-Systems
$\mathbf{K}_{\Gamma\beta}$	dynamische Steifigkeitsmatrix der zylindrischen Hohlraumoberfläche
\mathbf{K}_{Δ}	Steifigkeitsmatrix des Dreieckelementes
$\mathbf{L}_{\mathbf{k}}$	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$
$\mathbf{L}_{\mathbf{s}}$	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{s}}$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\mathbf{s}}$
$\mathbf{L}_{\mathbf{z}}$	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{z}}$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\mathbf{z}}$
\mathbf{L}_{Δ}	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\Delta}$ aus den Verschiebungen \mathbf{u}_{Δ}
M	größte Ordnung der berücksichtigten Kugelflächenfunktionen
M_1, M_2	Skalarfunktionen
\mathbf{M}_{Δ}	Massenmatrix des Dreieckelementes
N	maximale Anzahl an Reihenglieder in Umfangsrichtung φ
N_i	Ansatzfunktionen zur Berechnung der Verschiebungen im Dreieckselement
\mathbf{N}_{ITM}	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix des gesamten überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{N}_{\beta\beta}$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix der zylindrischen Hohlraumoberfläche
\mathbf{N}_{Δ}	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_{Δ} aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}}$
O	maximale Anzahl an Reihenglieder in x -Richtung
P	eingetragene Leistung
\mathbf{P}_1	Matrix der l -ten assoziierten Legendre-Funktionen P_m^l an den Stützstellen ϑ_i
\mathbf{P}_{kop}	Kräfte an der Kopplungsfläche
\mathbf{P}_{HR}	Lastvektor $(-p_{RR} - F_p - G_p)$ an der Oberfläche des kugelförmigen Hohlraums
\mathbf{P}_{LR}	Lastvektor $(-p_{rx} - p_{rr} - p_{r\varphi})$ an der Oberfläche des zylindrischen Hohlraums
\mathbf{P}_{OF}	Lastvektor $(p_{zx} \ p_{zy} \ p_{zz})$ an der Oberfläche des Halbraums
\mathbf{P}_{ITM}	Lastvektor des überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{P}_{\Gamma\alpha}$	Vektor der Lasten an der Halbraumoberfläche
$\mathbf{P}_{\Gamma\beta}$	Vektor der Lasten an der zylindrischen Hohlraumoberfläche
\mathbf{P}_{Δ}	Vektor der Lasten am Dreieckselement

$\mathbf{P}_{\Delta k}$	Vektor der äquivalenten Knotenlasten am Dreieckselement
$\mathbf{P}_{\Gamma_{FE}}$	Vektor der Lasten am Kopplungsrand des FE-Systems
$\mathbf{P}_{\Omega_{FE}}$	Vektor der Lasten innerhalb des FE-Gebietes
Q^i	Koeffizienten der Volumenkraft
R	radiale Koordinate in Kugelkoordinaten
R_0	Radius des kugelförmigen Hohlraums
\mathbf{R}	Ortsvektor
S	maximale Anzahl an Reihenglieder in y -Richtung
\mathbf{S}_{ITM}	Spannungsmatrix des überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{T}, \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\gamma$	Matrizen zur Transformation der Freiheitsgrade des FE-Systems
\mathbf{T}_{k-z}	Matrix zur Transformation der Spannungen von kartes. in Zylinderkoordinaten
\mathbf{T}_{k-s}	Matrix zur Transformation der Spannungen von kartes. in Kugelkoordinaten
\mathbf{V}_{ITM}	Matrix der Verschiebungen des überlagerten ITM-Systems
\mathbf{W}	Wichtungsmatrix für Gauß-Legendre-Quadratur

Mathematische Symbole

$\circ \rightarrow \bullet$	Fourierhintransformation
$\bullet \rightarrow \circ$	Fourierrücktransformation
$\Re(\)$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im(\)$	Imaginärteil einer komplexen Größe
i	imaginäre Zahl
sign	Signum-Funktion
$\hat{(\)}$	Kennzeichnung für fouriertransformierte Größe
$\frac{\partial(\)}{\partial \theta}$	Partielle Ableitung einer Größe nach der Variablen θ
$(\)'$	Ableitung einer Größe nach der Koordinate x
$\dot{(\)}$	Ableitung einer Größe nach der Zeit
$(\) _i$	kovariante Ableitung einer Größe nach der Koordinate i
$(\)^T$	transponierte Matrix
$(\)^{-1}$	inverse Matrix
det($\)$	Determinante einer Matrix

I	Einheitsmatrix
Γ_{ij}^k	Christoffelsymbole
$J_n(z)$	Bessel-Funktion
$Y_n(z)$	Neumann-Funktion
$H_n^{(1)}(z)$	Hankel-Funktionen erster Art
$H_n^{(2)}(z)$	Hankel-Funktionen zweiter Art
$j_m(z)$	sphärische Bessel-Funktion
$y_m(z)$	sphärische Neumann-Funktion
$h_m^{(1)}(z)$	sphärische Hankel-Funktionen erster Art
$h_m^{(2)}(z)$	sphärische Hankel-Funktionen zweiter Art
$Y_m^l(\vartheta, \varphi)$	Kugelflächenfunktion
$P_m(\cos \vartheta)$	Legendre-Funktion
$P_m^l(\cos \vartheta)$	assoziierte Legendre-Funktion
$\bar{P}_m^l(\cos \vartheta)$	normierte assoziierte Legendre-Funktion