

# Automated and Error Controlled Model Reduction in Elastic Multibody Systems

Von der Fakultät Konstruktions-, Produktions-, und  
Fahrzeugtechnik und dem Stuttgart Research Centre for  
Simulation Technology der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von  
**Jörg Christoph Fehr**  
aus Backnang

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. Peter Eberhard

Mitberichter: Prof. Dr. Peter Benner

Jun. Prof. Dr. Bernard Haasdonk

Tag der mündlichen Prüfung: 19. September 2011

Institut für Technische und Numerische Mechanik  
Universität Stuttgart

2011



Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische  
Mechanik der Universität Stuttgart

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. Peter Eberhard

Band 21/2011

**Jörg Fehr**

**Automated and Error Controlled Model Reduction  
in Elastic Multibody Systems**

D 93 (Diss. Universität Stuttgart)

Shaker Verlag  
Aachen 2011

**Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek**

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2011

Copyright Shaker Verlag 2011

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0550-9

ISSN 1861-1651

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • e-mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## Vorwort

In den letzten fünf Jahren hatte ich die Ehre, am Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart zu arbeiten und zu promovieren.

Ich möchte mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Eberhard für das Vertrauen, die Wertschätzung und die hervorragende Unterstützung während meiner Zeit am ITM bedanken.

Des Weiteren möchte ich mich bei Prof. Benner und Jun. Prof. Haasdonk für die Übernahme des Mitberichts und dafür, dass sie schon während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter ihr großes Fachwissen über Modellreduktion mit mir teilten, recht herzlich bedanken. Die Zusammenarbeit mit Ihnen im Rahmen verschiedener Projekte war für mich extrem bereichernd. In besonderem Maße habe ich vom enormen Erfahrungsschatz von Prof. Schiehlen und Dr. Eiber während meiner Zeit am Institut profitiert. Herzlichen Dank, dass Sie mich daran teilhaben ließen. Jun. Prof. Seifried hat mich schon als Studienarbeiter betreut und stand mir immer als freundschaftlicher Ratgeber zur Seite. Herzlichen Dank, dass Sie jederzeit ein offenes Ohr und so oft einen goldwerten Tipp parat hatten und ich mit jedem Problem zu Ihnen kommen konnte, um mir Rat zu holen.

Meine Freunde und Kollegen Pascal Ziegler, Timo Gaugele, Christian Ergenzinger, Christoph Tobias, Michael Lauxmann, Thomas Kurz, Florian Fleißner und Jun Lu haben mich fast die komplette Zeit am ITM begleitet. Ich kann mir keine besseren Kollegen und Mitstreiter vorstellen und danke Euch allen. Ich habe es genossen, mit solch integren, intelligenten und netten Menschen im Team zu arbeiten, zu diskutieren und meinen Horizont zu erweitern.

Während meiner Zeit am ITM vollzog sich ein fast exponentielles Wachstum der Mitarbeiter. Alle namentlich aufzuzählen würde den Rahmen dieses Vorwortes sprengen. Aus diesem Grund gilt mein Dank allen ehemaligen und jetzigen Mitarbeitern für die gute und kollegiale Zusammenarbeit.

Ganz herzlich möchte ich mich bei meinen Studien-, Diplomarbeitern und Hiwis, die mit mir in den letzten fünf Jahren zusammengearbeitet haben, bedanken. Nur durch Euer Engagement, Eure Ideen und Eure Mitarbeit konnte diese Dissertation gelingen. Ich hatte das Glück, während meiner Zeit mit den besten Studierenden zusammenzuarbeiten und bin froh, dass mehrere von ihnen nun Mitarbeiter am ITM sind und Morembs weiterentwickeln.

Einen besonderen Dank auch an die Läufer des ITM für die schönen Freitagsnachmittagsläufe.

Der größte Dank gebührt jedoch meiner Familie, welche mich bestmöglich während der langen Entstehung dieser Dissertation begleitet hat. Die uneingeschränkte Unterstützung meiner Eltern und meiner Schwester ist unbezahlbar und gab mir die Kraft, diese Doktorarbeit durchzustehen. Bei meiner Schwägerin Lisa möchte ich mich ganz herzlich für ihre Geduld und ihre Arbeit bei der Durchsicht der Doktorarbeit bedanken. Am meisten möchte ich mich jedoch bei meiner Frau Caroline bedanken, die mir tagtäglich bei meiner Arbeit zur Seite stand, sich unzählige TM-Übungen und Vorträge über Gramsche Matrizen und Krylov-Unterraumverfahren anhören musste und mich in der letzten Phase der Doktorarbeit nur selten zu Gesicht bekam. Ich bin glücklich und Danke Gott, mit einem so wunderbaren Menschen verheiratet zu sein.

Backnang, im September 2011

Jörg Fehr

*Meiner Familie*



# Contents

Zusammenfassung . . . . .	XI
Abstract . . . . .	XV
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Importance of EMBS . . . . .	2
1.2 Review of the State of the Art . . . . .	6
1.2.1 Modeling and Simulation of Mechanical Systems . . . . .	7
1.2.2 Mathematical Methods for Model Reduction . . . . .	8
1.2.3 Model Reduction of Mechanical Systems . . . . .	11
1.3 Aims and Content of this Thesis . . . . .	13
<b>2 Theoretical Background</b>	<b>17</b>
2.1 Continuum Mechanics . . . . .	17
2.2 Finite Element Approach . . . . .	20
2.3 EMBS with the Floating Frame of Reference Formulation . . . . .	23
2.3.1 Kinematics of Elastic Multibody Systems . . . . .	23
2.3.2 Kinetics of a Deformable Body . . . . .	25
2.3.3 Reduction of the Elastic Degrees of Freedom . . . . .	28
2.4 Model Reduction of Second Order MIMO Systems . . . . .	30
2.4.1 Importance of Second Order Model Reduction . . . . .	33
2.5 Error Induced by Projection . . . . .	34
2.5.1 Error Measures for Second Order System . . . . .	34
2.5.2 Error System . . . . .	35
<b>3 Investigated Models</b>	<b>39</b>

---

3.1	Rack . . . . .	39
3.2	Noise Vibration Harshness Analysis of a Racing Kart . . . . .	41
3.3	Valve and Armature Impact Simulation in a Fuel Injector . . . . .	44
3.4	Definition of Interface Nodes . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Moment matching Based Model Reduction by Projection with Krylov-Subspaces</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	General Theory . . . . .	52
4.1.1	Krylov-subspaces for First Order Systems . . . . .	52
4.1.2	Krylov-subspaces for Second Order Systems . . . . .	55
4.2	Global Dual Rational Arnoldi . . . . .	60
4.2.1	Global Dual Rational Arnoldi for Second Order Systems . . . . .	61
4.2.2	Extensions of the SOGA Algorithm for Model Reduction of EMBS Systems . . . . .	66
4.3	Automated Selection of Expansion Points . . . . .	68
4.3.1	Iterative Rational Krylov Algorithm . . . . .	69
4.3.2	Laguerre Based Model Reduction . . . . .	71
4.3.3	SOGA based Automated Model Reduction . . . . .	80
4.4	Error Estimators . . . . .	83
4.4.1	Error Estimator by [KonkelFarleDyczij-Edlinger08] . . . . .	84
4.4.2	Comparison of the Error Estimators . . . . .	93
4.5	Summary Krylov-subspace Based Model Reduction . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Gramian Matrix Based Model Reduction</b> . . . . .	<b>99</b>
5.1	Gramian Matrices for Second Order Systems . . . . .	102
5.2	Frequency Weighted Gramian Matrices for Second Order Systems . . . . .	108
5.3	Error Induced by Projection with Gramian Matrices . . . . .	110
5.3.1	A-priori Error Bound for Oblique Projection . . . . .	113
5.4	Numerical Calculation of the Second Order Gramian Matrices . . . . .	114
5.4.1	Calculation of the Frequency Weighted Gramian Matrices for Diagonal Models . . . . .	115
5.4.2	Calculation of Gramian Matrices with a POD Based Approximation . . . . .	116

5.5	Advanced Basis Construction Methods . . . . .	122
5.5.1	Greedy Based Selection of Snapshots . . . . .	124
5.5.2	Adaptive Greedy Algorithms . . . . .	126
5.5.3	Adaptive Greedy Without a Validation Set . . . . .	128
5.5.4	Comparison of the Snapshot Selection Schemes . . . . .	129
5.5.5	Influence of the Error Measure / Error Estimator . . . . .	129
5.6	Sensitivity of the Reduction Methods based on Gramian Matrices . . . . .	132
5.6.1	Comparison of the Approximation Schemes for Frequency Weighted Gramian Matrices . . . . .	133
5.6.2	Second Order Balancing in Comparison to Reduction with the Dominant Eigenspace of the Gramian Matrices . . . . .	135
5.6.3	Influence of Frequency Weighting . . . . .	135
5.6.4	Influence of the Precision . . . . .	138
<b>6</b>	<b>Practical Issues for Model Reduction in EMBS</b>	<b>141</b>
6.1	Model Reduction Platform Morembs . . . . .	141
6.1.1	Key Aspects of the Implementation . . . . .	143
6.1.2	Model Reduction with Data from Commercial Finite Element Programs . . . . .	150
6.2	Two Sided Model Reduction . . . . .	152
6.3	Terminal Reduction via SVD MOR/ESVD MOR . . . . .	158
6.3.1	Input/Output Reduction . . . . .	159
6.3.2	Theoretical Background SVD MOR/ ESVD MOR . . . . .	160
6.3.3	Comparison with Classical Interface Definition Techniques . . . . .	164
<b>7</b>	<b>Conclusions and Outlook</b>	<b>167</b>
	<b>Literature</b>	<b>171</b>
	<b>Symbols</b>	<b>197</b>



## Zusammenfassung

Die Simulation mechanischer Systeme ist heutzutage ein essenzieller Baustein im Entwicklungsprozess vieler neuer Produkte. Für die Simulation dynamischer Vorgänge wird häufig die Methode der Mehrkörpersysteme (MKS) verwendet. Der Einsatz von immer leichteren Strukturen erfordert die Berücksichtigung elastischer Effekte in sehr vielen Bauteilen. Man spricht in diesem Fall von elastischen Mehrkörpersystemen (EMKS). Die Modellierung und numerische Simulation elastischer Verformungen geschieht meist mithilfe der Methode der Finiten Elemente (FE), wodurch in der Regel eine sehr große Anzahl von Freiheitsgraden in das Modell eingeführt wird. Der entscheidende Schritt für die effiziente Simulation von EMKS ist die Reduktion der elastischen Freiheitsgrade.

In diesem Zusammenhang ist es äußerst wichtig, dass der Modellreduktionsschritt in Zukunft ohne Experteninteraktion durchgeführt werden kann, weil z. B. schon der Konstrukteur einer Maschine Simulationsresultate zurate ziehen kann, um zu entscheiden, ob ein Entwurf bezüglich Leichtbau, Lebensdauer und Komfort passend ist. Aus diesem Grund ist das Ziel dieser Arbeit die Entwicklung eines vollständig automatisierten Reduktionsprozesses für mechanische Systeme.

Das Augenmerk dieser Arbeit liegt auf Modellreduktionsverfahren bekannt aus der Systemdynamik und der Mathematik. Im Gegensatz zu den modalen Reduktionsverfahren haben Verfahren wie Momentenabgleich durch Projektion auf Krylov-Unterräume oder auf Singulärwertzerlegungen basierende Verfahren bessere Fehlerschranken und können für bestimmte Frequenzbereiche optimiert werden. Die Modellreduktionsverfahren werden anhand dreier industriell relevanter Beispiele aus unterschiedlichen physikalischen Domänen untersucht. Für den Einsatz sowohl etablierter als auch moderner Verfahren sind exakt definierte Rand- und Koppelbedingungen notwendig. Sollen Flächenlasten aufgebracht werden, muss eine Schnittstelle erstellt werden. Die korrekte Kopplung durch Schnittstellenknoten ist ein sehr wichtiger Punkt und hat entscheidenden Einfluss auf das dynamische Verhalten und die Reduktionsergebnisse der untersuchten Systeme. Die implementierten Reduktionsverfahren können jedoch alle Schnittstellenknoten mathematisch korrekt behandeln. All diese Formen der Schnittstellenmodellierung benötigen eine Vorabbehandlung im FE Programm. Aus diesem Grund wird untersucht, ob moderne Ansätze aus der Modellreduktion von Mikro-Elektro-Mechanischen Systemen, so genannte „Terminal Reduction (SVD MOR/ESVD MOR)“ Ansätze, auch Vorteile bei der Simulation von mechanischen Systemen haben.

Für die Automatisierung der Reduktionsverfahren auf der Grundlage von Krylov-Unterräumen sind zwei Punkte besonders wichtig: Erstens die automatische Auswahl optimaler Entwicklungspunkte. Zur automatischen Auswahl optimaler Entwicklungspunkte werden drei Methoden eingeführt: Eine Methode basiert auf dem IRKA Algorithmus, eine zweite Methode auf einem Laguerre Ansatz und eine dritte auf dem Second Or-

der Adaptive Global Arnoldi Algorithmus. Die drei Methoden werden miteinander verglichen. Zweitens werden geeignete Fehlerschätzer als Abbruchkriterium für den Reduktionsprozess und als Auswahlverfahren für den nächsten Entwicklungspunkt entwickelt. Drei Fehlerschätzer werden vorgestellt und miteinander bezüglich Rechenzeit und Schätzqualität verglichen um somit den Reduktionsprozess zu optimieren. Des Weiteren wird der von [KonkelFarleDyczij-Edlinger08] vorgeschlagene Fehlerschätzer auf Systeme zweiter Ordnung ausgeweitet. Dieser Fehlerschätzer hat nachweisbare Fehlerschranken und liefert sehr gute Ergebnisse. Zusätzlich kann der Rechenaufwand durch eine Offline/Online Zerlegung verringert werden.

Neben den auf Krylov-Unterräumen basierenden Reduktionsverfahren wird die Modellreduktion basierend auf Gramschen Matrizen untersucht. In diesem Zusammenhang werden vier unterschiedliche Balancierungsverfahren für Systeme zweiter Ordnung miteinander verglichen. Die auf der Positions Gramschen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{P}_p$  und der Positions Gramschen Steuerbarkeitsmatrix des dualen Systems  $\mathbf{Q}_{pw}$  aufbauenden Modellreduktionen liefern in dieser Untersuchung die besten Ergebnisse. Die Reduktion mit frequenzgewichteten Gramschen Matrizen hat sich als sehr vorteilhaft erwiesen. Deshalb werden in dieser Arbeit stets frequenzgewichtete Gramsche Matrizen verwendet. Für sehr große Modelle ist eine Approximation der dominierenden Eigenräume der Gramschen Matrizen notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Methoden untersucht: Die eine approximiert das Matrizenintegral durch numerische Quadratur mittels Integralsnapshots, wobei die optimale Platzierung der Integralsnapshots durch den Transfer von aus der reduzierte Basen Methode bekannten ausgefeilten Basiskonstruktionsschemata erzielt wird. Folglich ist eine Beschleunigung des Reduktionsprozesses möglich. Die andere Approximationsmethode, ein zweistufiger Ansatz, erzielt ebenso sehr gute Ergebnisse. Ferner wurde für das Modellreduktionsverfahren basierend auf Gramschen Matrizen eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Die wichtigsten Kriterien für einen erfolgreichen Reduktionsprozess sind die korrekte Auswahl der Gramschen Matrizen und die Wahl des adequate Frequenzbereichs für die Berechnung.

Die komplette Forschungsarbeit wurde im innovativen Präprozessor für Modellreduktion von elastischen Mehrkörperystemen (Morembs) implementiert und untersucht. Hierbei liest Morembs Daten aus Standard-FEM Programmen zur Erzeugung des vollen FE Modells ein und sendet Daten für die Simulation der flexiblen Körper in Standard-MKS Programme. Zur Gewinnung der elastischen Ansatzfunktionen werden moderne Reduktionsmethoden an Stelle von modalen Reduktionsmethoden verwendet. Die vertraute Prozesskette mit Programmen zur Modellierung und Simulation kann weiterhin verwendet werden, es wird lediglich der Präprozessor ersetzt. Dies ist für die industrielle Anwendung wichtig, da damit nur ein minimaler Eingriff in die bestehende Prozesskette nötig ist. Für Modellierung und Simulation ist somit keine Softwareumstellung nötig.

Die Anwendung dieser moderner Reduktionsmethoden ermöglicht eine deutliche Ver-

ringerung des Fehlers bzw. eine Verbesserung der Abbildungsgüte im Vergleich zur modalen Reduktion. Darüber hinaus sind globale Fehlerschranken bzw. sinnvolle Fehlerschätzer vorhanden, eine Gewichtung relevanter Frequenzbereiche ist sehr einfach möglich und letztendlich können bessere Simulationsergebnisse in kürzerer Rechenzeit erzielt werden. Des Weiteren ermöglicht die Automatisierung der Reduktionsverfahren, dass auch Nichtexperten ohne das hierfür spezifische mathematische Hintergrundwissen die modernen Reduktionsverfahren anwenden können.



## Abstract

The simulation of mechanical systems nowadays has to be considered as an essential part of the development process of many new products. For the description of the dynamical behavior of the mechanical subsystems, the method of multibody systems (MBS) is frequently used.

Nowadays, the use of lighter structures and an increased operating speed demand for the consideration of elastic effects for many components. This approach is called flexible multibody systems or elastic multibody systems (EMBS). Mostly, the modeling and numerical simulation of elastic bodies is achieved with the finite element method, which often leads to a high number of degrees of freedom. Therefore, one essential step for an efficient simulation of EMBS is the reduction of the elastic degrees of freedom.

In this context, it is very important that in the future the model reduction step should work without expert interaction. This is important since e.g. already the machine designer needs simulation results to decide if the design is appropriate with respect to lightweight, durability or comfort aspects. Therefore, the objective of this investigation is the development of a totally automatic reduction process for mechanical systems.

This dissertation concentrates on model reduction methods from system dynamics and mathematics. Contrary to modal reduction methods, advanced model reduction techniques, like moment matching or singular value decomposition (SVD)-based reduction techniques, have rigorous error bounds and can be tuned in a certain frequency range.

Within the framework of this investigation, the reduction techniques are researched with three different models from different application areas. In general terms, well-defined boundary and coupling conditions are essential for the use of many established and new reduction techniques, e.g. if area forces are applied to the model an interface introduction is indispensable. It is shown that the correct coupling via interface nodes is a very important issue and has a decisive influence on the dynamic behavior and the reduction results. The objective of giving the user the freedom of defining different interfaces and then using the different reduction techniques was realized. However, all these methods require a pre-processing step of the model within the FE program. Therefore, the new interesting mathematical approach called terminal reduction via SVD MOR, respectively ESVD MOR, see e.g. [BennerSchneider09], is investigated.

For the automation of the Krylov-subspace based model reduction two points are of special interest. Firstly, an automated selection of expansion points is used because of the expansion point dependency. Three different methods for an automated selection of expansion points are introduced, i.e. an IRKA based approach, a Laguerre based approach and a method based on a second order global Arnoldi procedure. Secondly, appropriate error estimators are developed as stopping criteria when the desired accu-

racy is reached and for the selection of additional expansion points. Three different error estimators were introduced and compared regarding computation speed and estimation quality in order to speed up the reduction process. Moreover, the error estimator proposed in [KonkelFarleDyczij-Edlinger08] is extended for second order MIMO system. This error estimator has a provable error bound and shows very satisfactory results. Additionally, with an offline/online decomposition an efficient calculation of the error is possible.

Besides, the Krylov-subspace based model reduction, model reduction based on Gramian matrices is investigated. In this context, four different second order balancing reduction techniques are compared. Concerning the investigated model, the model reduction techniques based on the position controllability  $\mathbf{P}_p$  and the position controllability Gramian matrix of the dual system  $\mathbf{Q}_{pv}$  show the best results. It is shown that the reduction based on frequency weighted Gramian matrices is very advantageous. Therefore, all the reductions are done with frequency weighted Gramian matrices. For large scale models, an approximation of the dominant eigenspace of the Gramian matrices is needed. Two different methods are shown in this investigation. One approximation possibility is a two-step approach, compare e.g. [Lehner07]. The other method approximates the matrix integral needed for calculating the Gramian matrices by quadratures using integral kernel snapshots. The optimal placement of the integral kernel snapshots is achieved by transferring advanced basis construction schemes used in Reduced Basis methods. With this method, a speedup of the reduction process is achieved. In addition, a sensitivity analysis of the parameters involved in the model reduction process with Gramian matrices is accomplished. The most sensitive parameters, the correct selection of Gramian matrices involved in the model reduction process and the correct frequency weighting are identified.

All the experiments are realized and implemented in the powerful new pre-processor for **Model Order Reduction of Elastic Multibody Systems** (Morembs). Morembs reads data from several standard FE programs to assemble the full FE body and sends the data to standard EMBS programs for simulating the flexible bodies. For the calculation of the elastic ansatz functions modern reduction techniques are used instead of modal reduction ones. The confidant process chain with programs for modelling and simulation can still be used, solely the pre-processor for model reduction is replaced. This is especially important for industrial applications because only a minimal intervention in the consisting software is necessary. For modeling and simulation no adjustment is necessary.

By using modern reduction techniques a significant reduction of the error respectively an improvement of the simulation quality is achieved. Furthermore, a priori error bounds or efficient error estimators are available and a weighting of interesting frequency ranges is easily possible. Finally due to the automation of the reduction methods also non expert users are now able to use the advanced non-modal reduction procedures without having the mathematical background on which they are based.