Peter Göthner

ALGEBRA - ein lockerer Einstieg

Berichte aus der Mathematik

Peter Göthner

Algebra - ein lockerer Einstieg

Shaker Verlag
Aachen 2013

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-2218-6
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Drückt man noch die Schulbank, so verbindet man den Begriff "Algebra" häufig mit dem Lösen von Gleichungen, mit Untersuchungen zu deren Lösbarkeit in verschiedenen Zahlbereichen, vielleicht auch mit dem Umformen von Termen und dem Arbeiten mit Variablen.
Es ist eine sehr elementare Algebra.
Seit mehr als hundert Jahren haben sich die Auffassungen von diesem Begriff grundlegend geändert. Die Algebra beschäftigt sich heute vorwiegend mit der Untersuchung und Nutzung algebraischer Strukturen.
Dies sind Mengen, in denen eine Operation oder auch mehrere Operationen mit fest definierten Eigenschaften wirken.
Eine solche "abstrakte" Algebra besitzt zudem den Vorteil, dass ihre Resultate für viele andere mathematische und außermathematische Sachverhalte genutzt werden können.
Die oben angedeutete "klassische" Algebra ist als winziges Teilgebiet in der modernen "abstrakten" Algebra aufgehoben.

Wir wollen uns einer solchen Algebra außerordentlich vorsichtig nähern. Dabei ist es zunächst nützlich, sich mit dem Begriff „Menge“ und dem Umgang mit Mengen zu befassen. Wir werden uns einen Einblick in die Vielfalt von Operationen und Relationen verschaffen und unsere Kenntnisse über Abbildungen vertiefen.
Auf einer solchen Basis aufbauend kann man bereits viele Analogien erkennen und überraschende Zusammenhänge entdecken.
Beispielsweise erfüllen die Multiplikation rationaler Zahlen, die Addition von Vektoren, die Addition von Matrizen, die Nacheinanderausführung von Drehungen um einen festen Punkt einer Ebene die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Offenbar ist es weniger wesentlich, *womit* man rechnet, sondern vielmehr *wie, nach welchen Regeln,* man rechnet.
Greift man diese Gedanken auf, ist der Weg zu algebraischen Strukturen gar nicht mehr weit. Man sieht ab von der konkreten Natur der Elemente in den jeweiligen Mengen und damit auch von den spezifischen Operationen, geht über zu einer Menge M, die aus "irgendwelchen" Elementen besteht und betrachtet Operationen auf M,

für die man ein "Regelwerk" von Eigenschaften festlegt. Damit hat man eine algebraische Struktur definiert. Und die genannten konkreten Mengen mit ihren Operationen sind dann Beispiele oder - wie man auch sagt - *Modelle* einer solchen Struktur.
Ausgehend von diesem aus Axiomen bestehenden "Regelwerk", in dem meist nur wenige Eigenschaften festlegt sind, wird eine ganze Theorie der jeweiligen Struktur aufgebaut. Und jede gewonnene Erkenntnis in dieser Theorie gilt dann auch in jedem Modell, das zu dieser Struktur gehört. Mit anderen Worten: Jede wahre Aussage in der Theorie einer Struktur S ist dann auch in jedem Modell von S wahr.
Dies ist natürlich eine überaus nützliche Erkenntnis: Man braucht gar nicht mehr alle in einem Strukturmodell formulierten Aussagen zu beweisen. Vielmehr übertragen sich auf natürliche Weise die in der Theorie der entsprechenden Struktur geführten Beweise auf alle Modelle.
Das Arbeiten mit Strukturen ist somit nicht nur geprägt von Strenge und Schönheit, es erweist sich auch als außerordentlich ökonomisch im Hinblick auf das Beweisen mathematischer Aussagen.

Der Leser wird spüren, dass bereits die Beschäftigung mit Mengen, Relationen, Operationen und Abbildungen in den ersten drei Kapiteln viel "algebraisches Gedankengut" enthält und somit an eine "strukturelle Denkweise" heranführt.
Aus diesem Grunde sollte man die ersten Kapitel nicht vollständig übergehen.

Der Titel des Buches verspricht einen "lockeren Einstieg" in die (abstrakte) Algebra. "Locker" muss nicht immer auch "leicht" sein. Zwar wird durch vielfältiges Beispielmaterial, durch elementare Fragestellungen und durch nützliche Vergleiche zwischen mathematischen Aussagen mit Alltagssituationen die schrittweise Erarbeitung abstrakter Begriffe und Zusammenhänge vorbereitet, ein konsequentes Mitdenken und ein hartnäckiges Vorgehen beim Lösen von Übungsaufgaben wird dem interessierten Leser allerdings kaum erspart bleiben.

Die Übungen bieten zugleich die Möglichkeit zu überprüfen, inwieweit die eingeführten Sätze und Begriffe verstanden worden sind. Lösungshinweise findet man am Ende des Buches.
Der Reiz, eine Aufgabe selbständig richtig zu lösen, ist eine wichtige Motivation für die Erarbeitung von Zusammenhängen in der Mathematik. Man sollte deshalb dem Versuch widerstehen, bereits beim ersten Misslingen eines Lösungsversuches im Lösungsteil nachzuschlagen.

An einigen Stellen wird vom direkten Weg zu den algebraischen Strukturen abgewichen und ein mitunter etwas steiniger Nebenpfad genutzt, der zu interessanten mathematischen und mathematikhistorisch bedeutsamen Inhalten führt. Man erkennt dies in unserem Buch am Kleindruck.

Der Einstieg in das Buch kann nahezu voraussetzungslos erfolgen.
Mathematische Zeichen, Symbole und Zusammenhänge werden im jeweiligen Abschnitt erklärt. Einblicke und Erkenntnisse gewinnt man "en passant" bei der Erarbeitung des Textes.
Eine gewisse grobe Vorstellung von Zahlbereichen kann sicher vorausgesetzt werden.
Begriffe der mathematischen Logik wurden bewusst nicht in einem eigenen Kapitel dargestellt. Sie werden vielmehr an geeigneten Stellen eingeführt und genutzt.

Wichtige Definitionen und Sätze sind optisch hervorgehoben und nummeriert. So bedeutet zum Beispiel Definition 3.2, dass es sich um die 2. Definition im Kapitel 3 handelt. Das Ende eines Beweises erkennt man an dem Hinweis (w.z.b.w.) in der Bedeutung "was zu beweisen war".

Die ausgewählten Inhalte sowie ihre Darstellung dieser behutsamen Einführung in die Algebra lassen das Buch als geeignet erscheinen für interessierte Schüler höherer Klassen und Teilnehmer an Mathematikzirkeln. Es könnte sich zudem als recht nützlich erweisen für Studenten der ersten Semester und anregend für Mathematiklehrer.

Das Buch erhebt den Anspruch, eine etwas locker formulierte Einführung in die Anfänge der Algebra zu sein. Doch es kann nur eben nur ein Anfang sein, wenn man bedenkt, dass viele Generationen von Mathematikern an dem Gebäude der Algebra gebaut haben. Insofern kann der aufmerksame Leser zunächst nur einen ersten Blick durch einen Türspalt in dieses Gebäude werfen. Wer das Tor weiter aufstoßen will, sollte sich entsprechend seiner Interessen der in großer Fülle vorliegender Literatur zur Algebra bedienen. Auf spezielle Hinweise haben wir bewusst verzichtet.

Mein besonderer Dank gilt vor allem Frau Jacqueline Perge. Sie hat mit großer Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit die technische Bearbeitung des Manuskriptes übernommen. Ohne ihre tatkräftige Mitwirkung wäre die Fertigstellung des Buches nicht möglich gewesen.
Mein Dank gilt zudem Herrn Werner Reutter insbesondere für seine sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes sowie Herrn Dr. Jochen Dittmann. Beide haben durch kritische Hinweise und durchdachte Anregungen ganz wesentlich zum Gelingen einer lockeren Einführung in die Inhalte und Gedankengänge der Algebra beigetragen. Herrn Conrad Mädler gilt mein Dank für seine Unterstützung bei der technischen Umsetzung des Manuskriptes.

Meinen interessierten Lesern wünsche ich beides - Freude und Erfolg

…. August 2013 Peter Göthner

Inhalt