

Total positive Funktionen und exponentielle B-Splines in der
Zeit-Frequenz-Analyse

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Tobias Kloos

im Jahr 2015

Dissertation

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Dortmund

Vorsitzender der Prüfungskommission:	Prof. Dr. Matthias Röger
Erstgutachter:	Prof. Dr. Joachim Stöckler
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Ole Christensen
Dritter Prüfer:	Prof. Dr. Rainer Brück

Datum des Prüfungskolloquiums:	27.11.2015
--------------------------------	------------

Berichte aus der Mathematik

Tobias Kloos

**Total positive Funktionen und exponentielle
B-Splines in der Zeit-Frequenz-Analyse**

D 290 (Diss. Technische Universität Dortmund)

Shaker Verlag
Aachen 2016

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Dortmund, Technische Univ., Diss., 2015

Copyright Shaker Verlag 2016

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-4189-7

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Anwendung von Schoenbergs total positiven Funktionen, sowie exponentieller B-Splines in der Zeit-Frequenz-Analyse. Wir werden aufzeigen, dass sich diese Funktionen sehr gut als Fenster der Gabor-Transformation eignen und darüber hinaus anwendungsorientierte Algorithmen zur Implementierung angeben.

Nach einer kurzen Einführung in die Thematik betrachten wir zunächst die Zak-Transformierten der genannten Funktionen und charakterisieren für eine Teilklasse der total positiven Funktionen ihre Nullstellenmengen. Dies liefert bereits Gabor-Frames mit ganzzahligem oversampling und gibt Hinweise über die Existenz im Fall von rationalem oversampling. Anschließend beschäftigen wir uns mit Gabor-Systemen auf beliebigen separablen Gittern und legen einige Situationen dar, in welchen die Systeme der betrachteten Funktionen einen Frame liefern. In diesen Fällen beschreiben wir Algorithmen zur Konstruktion unendlich vieler verschiedener Duale mit kompakten Trägern, welche gegen den kanonischen Dual konvergieren. Weiter geben wir einen kurzen Einblick in die sich ergebenden Möglichkeiten zur Bildung von Gabor-Frames über nicht-separablen Gittern. Abschließend erläutern wir, wie die gewonnenen Erkenntnisse genutzt werden können, um diskrete Gabor-Frames und deren Duale zu konstruieren.

Einige Resultate dieser Arbeit wurden bereits veröffentlicht in:

[63]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J.: Zak transforms and Gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines. In: *J. Approx. Theory* 184 (2014), S. 209–237

[62]

KLOOS, T.: Zeros of the Zak Transform of Totally Positive Functions. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 21 (2015), S. 1130–1145

[64]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J. ; GRÖCHENIG, K.: Implementation of discretized Gabor frames and their duals. (2015). <http://arxiv.org/abs/1506.06918>. – submitted

Abstract

This thesis deals with the applicability of Schoenberg's totally positive functions and exponential B-splines in time-frequency analysis. We show that these functions provide excellent windows for the Gabor transform and give some application-oriented algorithms.

After a brief introduction to the topic, we consider the Zak transform of totally positive functions and exponential B-splines. We characterize the zero set of this transform for a special subclass of totally positive functions, which directly leads to the existence of Gabor frames with integer oversampling, and gives some information about the case of rational oversampling. Afterwards, we deal with Gabor systems on arbitrary separable lattices and present some concrete situations, where the considered functions yield a frame. In these cases, we describe algorithms for constructing infinitely many different duals with compact support, which converge to the canonical dual. We also provide a brief insight how to handle Gabor systems on non-separable lattices. Finally, we explain to construct discrete Gabor frames and their duals in the aforementioned situations.

Some results of this thesis are already published in:

[63]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J.: Zak transforms and Gabor frames of totally positive functions and exponential B-splines. In: *J. Approx. Theory* 184 (2014), pp. 209–237

[62]

KLOOS, T.: Zeros of the Zak Transform of Totally Positive Functions. In: *J. Fourier Anal. Appl.* 21 (2015), pp. 1130–1145

[64]

KLOOS, T. ; STÖCKLER, J. ; GRÖCHENIG, K.: Implementation of discretized Gabor frames and their duals. (2015). <http://arxiv.org/abs/1506.06918>. – submitted

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich zunächst einigen Menschen danken, die mich bei der Erstellung dieser Dissertation sehr unterstützt haben.

In besonders hohem Maße bin ich Prof. Dr. Joachim Stöckler zu Dank verpflichtet für die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen und seine Ermunterung zur Entwicklung und Bearbeitung neuer Ansätze. Weiterhin danke ich Prof. Dr. Ole Christensen und Prof. Dr. Karlheinz Gröchenig für viele inspirierende Gespräche während einiger Forschungsaufenthalte der vergangenen Jahre.

Darüber hinaus danke ich Dr. Thorsten Camps, Dr. Martin Scheer, Dr. Tobias Springer und Sven Badke für ihre fortwährende Unterstützung und Aufheiterung im Alltag, insbesondere an den vermeintlich erfolgloseren Tagen. Außerdem gebührt mein Dank unserer Sekretärin Christine Mecke für die Hilfe bei administrativen Tätigkeiten.

Schließlich möchte ich auch meiner Familie, allen voran Sara Saad, sowie meinen Eltern Thomas und Annemie Kloos danken, welche in allen Belangen des Lebens immer an meiner Seite stehen. Durch ihren Beistand und ihre Rücksicht trugen sie einen großen Teil zur Fertigstellung dieser Arbeit bei.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	5
1.1 Basen und Frames	5
1.2 Gabor-Frames für $L^2(\mathbb{R})$	11
1.3 Periodische exponentielle B-Splines	19
1.4 Total positive Funktionen	27
2 Die Zak-Transformation	33
2.1 Eigenschaften der Zak-Transformation	34
2.2 Gabor-Frames und die Zak-Transformation	37
2.3 Nullstellen der Zak-Transformierten von TP Funktionen und EB-Splines	42
3 TP Funktionen und PEB-Splines als Gabor-Fenster	53
3.1 Gabor-Frames von TP Funktionen und PEB-Splines	53
3.2 Einschränkungen für PEB-Splines	62

4	Duale Gabor-Frames	69
4.1	Algorithmen zur Berechnung von Dualen mit kompakten Trägern	69
4.2	Die finite section Methode und die Konvergenz der Duale	73
5	Nicht-separable Gitter	81
5.1	Die metaplektische Darstellung	83
5.2	Die multiwindow Methode	85
6	Diskrete Gabor-Frames	91
	Ausblick	97
	Literaturverzeichnis	99