

Informationstechnik

Klaus-Dieter Thies

**Elementare Einführung in die  
Wahrscheinlichkeitsrechnung,  
Informationstheorie,  
stochastische Prozesse  
mit Warteschlangentheorie und  
CRC-Berechnungen**

**für**

**Computernetzwerke**

Mit einer wahrscheinlichkeitstheoretischen  
Leistungsanalyse des klassischen Ethernet

SHAKER  
Verlag



Berichte aus der Informationstechnik

Klaus-Dieter Thies

**Elementare Einführung in die  
Wahrscheinlichkeitsrechnung,  
Informationstheorie,  
stochastische Prozesse mit  
Warteschlangentheorie und  
CRC-Berechnung**

**für**

**Computernetzwerke**

Mit einer wahrscheinlichkeitstheoretischen  
Leistungsanalyse des klassischen Ethernet

3. überarbeitete und erweiterte Auflage

Shaker Verlag  
Aachen 2016

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2016

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-4425-6

ISSN 1610-9406

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

## Vorwort

Die Motivation für dieses Buch ist die Leistungsmerkmale von Computer-Netzwerken im Allgemeinen und am Beispiel des klassischen Ethernet mit seiner CSMA/CD-Zugriffsmethode (Carrier Sense Multiple Access with Collisions Detection) im Speziellen wahrscheinlichkeitstheoretisch zugänglich zu machen. Dies liegt insofern auf der Hand, da sich das klassische Ethernet als ein Verbundsystem unabhängiger Computer präsentiert, die zufällig mit gewissen Wahrscheinlichkeiten den Übertragungskanal anfordern. So ist es ein ideales Modell dafür, die Verteilung dieser Anforderungen in seinen verschiedenen Formen zu entwickeln und darzustellen. Dazu gehören die Binomialverteilung, die geometrische Verteilung, die Poisson-Verteilung und die Normalverteilung einschließlich ihrer Erwartungswerte, Varianzen und Streuungen. In diesem Zusammenhang werden neben den ein- und mehrdimensionalen diskreten Zufallsvariablen auch die stetigen Zufallsvariablen untersucht.

Es sind keinerlei Kenntnisse über die Begriffe, Sätze und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung erforderlich. Diese werden am Beispiel der Netzwerk-Zugriffsmethode elementar eingeführt. So erscheint das Wesen des klassischen Ethernet im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von besonderem Interesse ist hierbei der Nutzungsgrad des Übertragungskanals (Kanaleffizienz), der sich als Funktion der Leitungslänge, der Framegröße und der Kanalkapazität darstellen lässt.

Aufbauend auf den Erkenntnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung schließt sich eine elementare Einführung in die Informationstheorie an. Die Motivation hierfür ist die Kanalkapazität nach Shannon informationstheoretisch einsichtig zu machen. Der Informationsgehalt, die Entropie, abhängige und unabhängige Verbundquellen, zeitkontinuierliche Zufallssignale und deren Verteilungen sind die wesentlichen Bestandteile. Mit dem wohl bedeutendsten Ergebnis der Informationstheorie, der Shannonschen Kanalkapazität, endet dieses Kapitel.

Es folgt eine elementare Einführung in die stochastischen Prozesse. Hier werden die Grundlagen der Warteschlangentheorie behandelt. Dazu gehören die Markov-Ketten mit diskreter Zeit, der Poisson-Prozess, die Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung, der Markov-Prozess mit kontinuierlicher Zeit als Approximation der diskreten Markov-Kette und der Birth and Death-Prozess.

Weil Warteschlangen die essentiellen Datenstrukturen in der Computer-Kommunikation sind, folgt eine wahrscheinlichkeitstheoretische Bearbeitung der Single-Server- und der Multi-Server-Warteschlangensysteme mit unbegrenzten und begrenzten Warteräumen. Von besonderem Interesse sind dabei die exponentialverteilten Ankunfts- und Bedienzeiten der Nachrichten und der Wartezeiten, die ihrerseits einer Erlang-Verteilung genügen.

Weil es in der Computer-Kommunikation oft vorkommt, dass Störungen auf dem Übertragungskanal die ausgesendeten Zeichen beschädigen, wird im letzten Kapitel gezeigt, wie falsch ankommende Zeichen entweder von Hardware oder von Software aufgespürt werden können. Die Methode benutzt den in der Praxis bevorzugten Polynomcode, der auf der modulo2 Arithmetik basiert und der als zyklischer Redundanzcode oder crc (cyclic redundancy code) bekannt ist.

So erkennt der Leser eine Anzahl von Wissensgebieten, die miteinander in Verbindung treten und die im Zusammenwirken die Leistungsmerkmale von Computer-Netzwerken beschreiben. Dabei werden alle relevanten Sätze und Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Informationstheorie, der stochastischen Prozesse (mit Warteschlangentheorie) und der modulo2 Arithmetik nicht einfach genannt, sondern durch gut nachvollziehbare Herleitungen bewiesen und von Beispielen begleitet. Erfreulicherweise sind dafür nur geringe mathematische Kenntnisse aus der Analysis, der Differential- und Integralrechnung und der Matrizen-Rechnung notwendig. Sie werden an den betreffenden

Stellen kurz und verständlich in Erinnerung gerufen. Überhaupt ist es ein Anliegen des Buches, die Dinge so plausibel wie möglich darzustellen.

Klaus-Dieter Thies, Ph.D.

## Inhalt

### Kapitel 1

#### Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Leistungsmerkmale des klassischen Ethernet

1

1.1	Einleitung	1
1.1.1	Die Binomialverteilung	3
1.1.2	Die maximale Wahrscheinlichkeit von $p_1$	8
1.2	Die Erfolgswahrscheinlichkeit bei $k$ Versuchen	11
1.2.1	Die geometrische Verteilung	11
1.3	Die diskrete Zufallsvariable	15
1.3.1	Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen	16
1.4	Die durchschnittliche Anzahl der Versuche; der Erwartungswert	19
1.4.1	Die durchschnittliche Anzahl der Kollisionen; der Erwartungswert	28
1.5	Die Kanaleffizienz bei CSMA/CD	30
1.6	Der Binary Exponential Backoff-Algorithmus	38
1.6.1	Simulation der Zufälligkeit	46
1.7	Die durchschnittliche Anzahl sendender Stationen; der Erwartungswert	48
1.8	Die Poisson-Verteilung selten sendender Stationen und der Erwartungswert	54
1.9	Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse	58
1.10	Varianz und Streuung der diskreten Zufallsvariablen	64
1.10.1	Herleitung der Varianz aus der erzeugenden Funktion	68
1.10.1.1	Varianz und Streuung der geometrisch verteilten Zufallsvariablen	69
1.10.1.2	Varianz und Streuung der binomialverteilten Zufallsvariablen	71
1.10.1.3	Varianz und Streuung der Poisson-verteilten Zufallsvariablen	74
1.11	Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	75
1.11.1	Der Erwartungswert und die Varianz einer stetigen Zufallsvariablen	100
1.11.1.1	Der Erwartungswert der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen	102
1.11.1.2	Die Varianz und die Streuung der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen	104
1.11.2	Die Wendepunkte der $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen	107
1.11.3	Der Erwartungswert der $N(0,1)$ -verteilten Zufallsvariablen	110
1.11.4	Die Varianz und die Streuung der $N(0,1)$ -verteilten Zufallsvariablen	111
1.11.5	Die Wendepunkte der $N(0,1)$ -verteilten Zufallsvariablen	112
1.11.6	Die Verteilungsfunktion der normalverteilten Zufallsvariablen	116
1.12	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und unabhängige Ereignisse	126
1.12.1	Die vollständige Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes	131
1.13	Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen	135
1.13.1	Verteilungsfunktion einer diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen	145
1.14	Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariablen	148
1.15	Summen und Produkte von zwei- und mehrdimensionalen diskreten Zufallsvariablen	154
1.15.1	Die Kovarianz von zwei- und mehrdimensionalen diskreten Zufallsvariablen	160
1.15.2	Die Verteilungsfunktion einer diskreten mehrdimensionalen Zufallsvariablen	165

### Kapitel 2

#### Grundzüge der Informationstheorie

169

2.1	Der Informationsgehalt (die Formel von Hartley)	169
2.2	Die Entropie (die Formel von Shannon)	173
2.3	Die Entropie unabhängiger Verbundzeichen	178

2.4 Die Entropie abhängiger Verbundzeichen	183
2.5 Informationsfluss und Kanalkapazität	204
2.6 Kontinuierliche Nachrichtenquellen und zufällige Signale	215
2.6.1 Die differentielle Entropie und Transinformation	219
2.6.2 Gleichmäßig verteilte Zufallssignale	225
2.6.3 Normalverteilte Zufallssignale	228
2.6.4 Die Kanalkapazität nach Shannon	231

### **Kapitel 3**

#### **Stochastische Prozesse**

<b>3.1 Einführung</b>	<b>234</b>
<b>3.2 Markov-Ketten</b>	<b>234</b>
3.2.1 Die Berechnung der Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeit	237
3.2.2 Stationäre Verteilung	243
3.2.3 Die Berechnung der Ankunfts-wahrscheinlichkeiten	247
3.2.4 Die Berechnung der Übergangszeiten	250
<b>3.3 Prozesse mit kontinuierlicher Zeit</b>	<b>259</b>
3.3.1 Der Poisson-Prozess	262
3.3.2 Die Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung	267
<b>3.4 Markov-Prozess</b>	<b>277</b>
3.4.1 Der Birth- and Death-Prozess	278
3.4.2 Die M/M/1-Warteschlange	282
3.4.2.1 Die durchschnittliche Anzahl von Nachrichten im System	284
3.4.2.2 Die durchschnittliche Anzahl von Nachrichten in der Warteschlange	285
3.4.2.3 Die durchschnittliche Aufenthaltszeit einer Nachricht im System	286
3.4.2.4 Die durchschnittliche Aufenthaltszeit einer Nachricht in der Warteschlange	286
3.4.2.5 Die Formeln von Little	287
3.4.2.6 Die Gamma-Funktion und die Erlang-Verteilung	290
3.4.2.6.1 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T =$ Wartezeit im Warteschlangensystem	293
3.4.2.6.2 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T_s =$ Wartezeit in der Warteschlange	298
3.4.3 Die M/M/1/k-Warteschlange	302
3.4.3.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten im System	303
3.4.3.2 Die mittlere Anzahl von Nachrichten in der Warteschlange	305
3.4.3.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht im System	307
3.4.3.4 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht in der Warteschlange	308
3.4.4 Die M/M/s-Multiserver-Warteschlange	310
3.4.4.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L_s)$ in der Warteschlange	315
3.4.4.2 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T_s)$ in der Warteschlange	316
3.4.4.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T)$ im System	317
3.4.4.4 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L)$ im System	317
3.4.4.5 Die Erlang'sche C-Formel	318
3.4.4.6 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T_s =$ Wartezeit in der Warteschlange	321
3.4.4.7 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T =$ Aufenthaltszeit im M/M/s-Warteschlangensystem	328
3.4.5 Die M/M/s/k-Multiserver-Warteschlange	335
3.4.5.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L_s)$ in der Warteschlange	336
3.4.5.2 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L)$ im System	338

3.4.5.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T_s)$ in der Warteschlange	339
3.4.5.4 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T)$ im System	339
3.4.5.5 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T_s =$ Wartezeit in der Warteschlange	342
3.4.5.5.1 Die Wartezeitverteilung in der Warteschlange des <b>M/M/1/k</b> -Systems	348
3.4.5.6 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T =$ Aufenthaltszeit im M/M/s/k-Warteschlangensystem	351
3.4.5.6.1 Die Verteilung der Zufallsvariablen $T =$ Aufenthaltszeit im <b>M/M/1/k</b> -Warteschlangensystem	353
3.4.6 Warteschlangen für Quellen mit endlicher Anzahl von Nachrichten	355
3.4.6.1 Die mittlere Anzahl $E(L)$ von Nachrichten im System	359
3.4.6.2 Die mittlere Anzahl $E(L_s)$ von Nachrichten in der Warteschlange	359
3.4.6.3 Die mittlere Aufenthaltszeit $E(T)$ einer Nachricht im System	360
3.4.6.4 Die mittlere Aufenthaltszeit $E(T_s)$ einer Nachricht in der Warteschlange	360
<b>Kapitel 4</b>	
<b>Zyklischer Redundanzcode (CRC) mit Fehlererkennung</b>	363
4.1 Einleitung	363
4.2 Cyclic Redundancy Code (CRC)	364
4.3 Die modulo $m$ Rechnung	365
4.3.1 Die Arithmetik im Galois-Feld $GF(2)$	366
4.4 Fehlererkennung mit der Polynomcodemethode	367
4.5 Zyklische Eigenschaften	369
4.6 Modulo2 Division und Hardware	370
4.7 Modulo2 Division und Software	376
4.7.1 frame check sequence-Berechnung für 1 Oktet	377
4.7.2 frame check sequence-Berechnung für $n$ Oktets	380
<b>5. Personen- und Sachregister</b>	382