

Algorithmic System Design under Consideration of Dynamic Processes

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

genehmigte

D I S S E R T A T I O N

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Lena Charlotte Altherr

aus Karlsruhe

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. rer. nat. Ulf Lorenz
Tag der Einreichung:	19.04.2016
Tag der mündlichen Prüfung:	24.05.2016

Darmstadt 2016

D 17

Forschungsberichte zur Fluidsystemtechnik

Band 11

Lena Altherr

**Algorithmic System Design
under Consideration of Dynamic Processes**

D 17 (Diss. TU Darmstadt)

Shaker Verlag
Aachen 2016

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2016

Copyright Shaker Verlag 2016

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-4848-3

ISSN 2194-9565

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Vorwort des Herausgebers

Kontext

Die Produkt- und Systementwicklung hat die Aufgabe technische Systeme so zu gestalten, dass eine gewünschte Systemfunktion erfüllt wird. Mögliche Systemfunktionen sind z.B. Schwingungen zu dämpfen, Wasser in einem Siedlungsgebiet zu verteilen oder die Kühlung eines Rechenzentrums.

Wir Ingenieure reduzieren dabei die Komplexität eines Systems, indem wir dieses gedanklich in überschaubare Baugruppen oder Komponenten zerlegen und diese für sich in Robustheit und Effizienz verbessern. In der Kriegsführung wurde dieses Prinzip bereits 500 v. Chr. als „Teile und herrsche Prinzip“ durch Meister Sun in seinem Buch „Die Kunst der Kriegsführung“ beschrieben. Das Denken in Schnitten ist wesentlich für das Verständnis von Systemen: „Das wichtigste Werkzeug des Ingenieurs ist die Schere“.

Das Zusammenwirken der Komponenten führt anschließend zu der gewünschten Systemfunktion. Während die Funktion eines technischen Systems i.d.R. nicht verhandelbar ist, ist jedoch verhandelbar mit welchem Aufwand diese erfüllt wird und mit welcher Verfügbarkeit sie gewährleistet wird. Aufwand und Verfügbarkeit sind dabei gegensätzlich. Der Aufwand bemisst z.B. die Emission von Kohlendioxid, den Energieverbrauch, den Materialverbrauch, ... die „total cost of ownership“. Die Verfügbarkeit bemisst die Ausfallzeiten, Lebensdauer oder Laufleistung. Die Gesellschaft stellt sich zunehmend die Frage, wie eine Funktion bei minimalem Aufwand und maximaler Verfügbarkeit realisiert werden kann.

Die Methode

Die Antwort auf die oben genannte Frage besteht darin, nicht nur nach dem Prinzip „Teile und herrsche“ einzelne Komponenten des Gesamtsystems isoliert zu optimieren, sondern deren Zusammenspiel zu berücksichtigen. Das Spielfeld für den Entwurf der Kühlung eines Rechenzentrums besteht z.B. aus Rohrleitungen, Pumpen unterschiedlicher Größe, Ventilen und Wärmetauschern. Für ein optimales Gesamtsystem ist es Aufgabe, die Komponenten aus dem Spielfeld so anzuordnen, zu verschalten und zu betreiben, dass die Funktion mit minimalem (Energie-)Aufwand und maximaler Verfügbarkeit erfüllt werden kann. Für einfache Systeme gelingt dem Planer die optimale Systemsynthese, für größere Systeme ist dies ohne algorithmische Hilfe unmöglich.

Der Grund liegt in der für den Menschen unüberschaubaren Zahl möglicher Entscheidungen. Die hinter den Entscheidungen steckenden Fragen sind immer diskret, d.h. der Art „Komponente A oder B?“. Bei einer Verschaltung von 6 Komponenten eines Pumpensystems sind bereits über 5000 Systemvarianten möglich. Motivation des Technical Operations Research (TOR) ist es, Algorithmen als Entscheidungsunterstützung zu nutzen, um optimale Systeme zu planen und zu betreiben.

Der TOR-Ansatz wurde für quasistationäre und quasistatische Probleme in den vergangenen vier Jahren an der TU Darmstadt entwickelt und erfolgreich zur Strukturierung von Fluidfördereinrichtungen (Booster-Station) angewendet. Der TOR-

Ansatz wurde bisher nicht auf zeitvariante Probleme angewendet. Zeitvariante Probleme treten jedoch immer auf, wenn die Verfügbarkeit von Systemen im algorithmischen Entwurfsprozess antizipiert werden soll. Dabei geht es um die Antizipation von Systemdegradation durch mechanische und/oder chemische Alterung.

Die Forschungsfrage

Frau Altherr erweitert den TOR-Ansatz auf zeitvariante Probleme und zeigt dessen Anwendung am Beispiel eines hydraulischen Systems. Hierbei ist neu, dass die durch den späteren Betrieb zu erwartende Systemdegradation eines jeden möglichen Systemvorschlags bereits in der Entwicklungsphase antizipiert werden kann. Dadurch können Betriebs- und Wartungskosten vorausgesagt und minimiert werden und durch eine optimale Betriebs- und Wartungsstrategie die Verfügbarkeit des Systems garantiert werden.

Insgesamt ergibt sich ein mehrstufiges Optimierungsproblem, welches sich nicht direkt mit Standardsoftware lösen lässt. Während sich die erste Stufe des Optimierungsmodells durch eine sehr hohe kombinatorische Lösungsvielfalt bei schon wenigen zur Verfügung stehenden Komponenten auszeichnet, muss in der zweiten Stufe komplexe nichtlineare Physik berücksichtigt werden.

Frau Altherr stellt sich in der Arbeit zwei Aufgaben, eine technologische und eine methodische. Methodisch lotet sie diskrete Optimierungsmethoden zur Strukturierung von zeitvarianten Systemen aus, die durch Zeitglieder bis maximal erster Ordnung beschrieben werden. Damit lässt sich die Systemdegradation durch mechanischen und chemischen Verschleiß, sowie das zeitvariante Verhalten von Speicherelementen gleichermaßen behandeln.

Technologisch wendet Frau Altherr gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung an, um die Abtriebsseite eines hydrostatischen Getriebes algorithmisch zu strukturieren. Wesentliche Fragen sind hierbei die physikalische Modellierung, die Darstellung des Optimierungsproblems als mathematisches Programm, und dessen algorithmische Behandlung zur Lösungsfindung. Frau Altherr setzt hierzu einerseits auf Heuristiken zum schnelleren Auffinden sinnvoller Topologien, andererseits auf mathematische Dekomposition zur Bewertung des dynamischen Verschleiß- und Wartungsverlaufs.

Ergebnisse

Mit den von Frau Altherr vorgestellten Modellen und Algorithmen ist es möglich, Systemstrukturen zu finden, die eine 16-fach höhere Lebensdauer als ein konventioneller Systementwurf aufweisen. Wird die erwartete Lebensdauer maximiert, entstehen Systeme mit aktiver Redundanz. Die redundanten Komponenten werden genutzt, um die Last intelligent zu verteilen und damit das Gesamtsystem langlebiger zu machen, bei minimal möglichem Mehrinvest. Nachteil der entstehenden Systeme kann ihre höhere Komplexität sein, wodurch der Aufwand steigt.

Frau Altherr zeigt, wie zusätzlich eine auf realistische Bedingungen zugeschnittene Abwägung zwischen Aufwand und Verfügbarkeit bereitgestellt werden kann. Dazu erweitert sie das vorgestellte Grundmodell um die Betrachtung von Wartungsarbeiten.

Verschlossene Komponenten können zu bestimmten Wartungszeitpunkten ausgetauscht werden, so dass das System weiter seine Funktion erfüllen kann. Die Wartungsintervalle führen zu mehrstufigen mathematischen Programmen, deren algorithmische Behandlung neue Herausforderungen schafft.

Frau Altherr entwickelt eine Primalheuristik, die bei der gegebenen kombinatorischen Vielfalt verschiedenster Systemaufbauten dennoch schnell zu sinnvollen Topologie-vorschlägen gelangt. Grundlage ist die Idee, sich zunächst auf serien-parallele Verschaltungen der Komponenten zu konzentrieren, da diese mittels Konstruktionsvorschriften systematisch aufgestellt werden können. Das Gesamtnetzwerk des hydrostatischen Getriebes wird in der entwickelten Heuristik anschließend als Kombination vierer serien-paralleler Teilnetzwerke aufgebaut. Frau Altherr implementiert eine Nachbarschaftssuche, welche ausgehend von einer validen Lösung den Raum der diskreten Systemstrukturen systematisch durchsucht. Diese Lokale Suche wird von Frau Altherr in die Metaheuristik Simulated Annealing eingebettet, sodass einem Verharren des Algorithmus in lokalen Optima entgegengewirkt werden kann. Zum Auffinden einer optimalen Betriebs- und Wartungsstrategie und von dualen Schranken implementiert Frau Altherr Dynamische Programmierung und ein Langrange-Dekompositions-Verfahren.

Innovation

Durch die Arbeit wird eine neue Dimension der Strukturoptimierung aufgezeigt. Man wird in Zukunft bei der Gestaltung von Systemstrukturen neben der reinen Funktionserfüllung deutlich besseren Zugang zu Sekundärkriterien wie Lebensdauer und Verfügbarkeitsgarantien erhalten.

Die vorliegende Schrift beinhaltet folgende Inhalte und Teile

- Darstellung des TOR-Gesamtgedankens über die gesamte Schrift hinweg
- Erstellung eines physikalisch hinterlegten technischen Optimierungsmodells, welches neben der Fluidmechanik Verschleiß kodiert und Wartungsoptimierung auf formaler Ebene ermöglicht
- Aufbau eines Gesamtkonzepts von hochformaler mathematischer Modellierung über heuristische Lösungsfindung plus Optimalitätsabschätzungen über duale Schranken in einem bislang eher schwer zugänglichen Bereich der technischen Systeme

Die Optimierung technischer Systeme an der Schnittstelle von Mathematik, Informatik und Ingenieurwesen wird sowohl gründlich als auch anschaulich und nachvollziehbar dargestellt. Ich bin der Überzeugung, dass die vorliegende Arbeit die algorithmische Herangehensweise zum Lösen von Nachhaltigkeitsproblemen verschiedener Art nachhaltig beeinflussen wird.

Peter Pelz,
Darmstadt, am 22.08.2016

Vorwort

Ich möchte allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank hierbei gilt:

Prof. Dr.-Ing. Peter F. Pelz, der mir für die Durchführung dieser Arbeit vollste Unterstützung zukommen ließ und mir durch seine interessante Aufgabenstellung interdisziplinäres Forschen an der Schnittstelle zwischen Ingenieurwissenschaften und Mathematik ermöglicht hat.

Prof. Dr. Ulf Lorenz für die Zweitkorrektur und die sehr gute fachliche Betreuung des mathematischen Aspekts dieser Arbeit. Durch inhaltliche Diskussionen mit ihm hat meine Arbeit an thematischer Vielfalt gewonnen.

Dem Leiter der Gruppe Technische Optimierung, Thorsten Ederer, für die Durchsicht dieser Arbeit und die große Unterstützung bei fachlichen und praktischen Fragen.

Dem gesamten Team der Gruppe Technische Optimierung: Philipp Pöttgen, Marlene Utz und Jan Wolf, die mir in Gesprächen stets hilfreiche Anregungen geben konnten.

Allen Kollegen und Studierenden am Institut für Fluidsystemtechnik, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere danke ich Angela Vergé, die durch ihr gemeinsam mit Prof. Pelz entwickeltes Modell zum Verschleiß von Ventilen durch strömungsbedingten Materialabtrag einen wichtigen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet hat.

Ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, meiner Oma und meinem Partner Patrick. Ich möchte ihnen an dieser Stelle von ganzem Herzen für ihre bedingungslose Unterstützung danken.

Lena Altherr
Eppelheim, im April 2016

Abstract

It is common practice to optimize technical components in terms of their characteristics, such as energy efficiency or durability. However, even highly optimized components can lead to inefficient or unstable system structures if their interaction is not taken into account. Considering systems instead of components opens up further potential for optimization. However, the increased potential is accompanied by an increased level of complexity.

This work was written as part of the Collaborative Research Centre 805, whose aim is to control uncertainty in load-carrying structures. In this context, the question of finding an optimal system structure has been investigated for a truss topology demonstrator. This dissertation examines the issue of structural uncertainty for a hydraulic system.

The structure of a hydrostatic transmission system whose components are subject to erosive wear is optimized via Mixed-Integer Linear Programming. Especially system synthesis problems in which dynamic processes like wear have to be modeled can often not be solved by standard discrete optimization techniques. This work exploits their specific problem structure to derive primal solutions and dual bounds.

The optimization problem is based on the graph representation of the system synthesis problem. In case of a series-parallel network, all possible system graphs can be represented by trees without internal nodes of degree 2 (series-reduced trees). This work shows how the approach can be applied to a non-series-parallel network by using problem-specific knowledge to divide the graph into series-parallel subgraphs. In this way, the tree representation can still be exploited to elegantly traverse the solution space of discrete structure decisions using a local search.

Based on a combination of simulated annealing and dynamic programming, a primal heuristic is developed that allows to find good solutions to the optimization problem when commercial solvers cannot find any feasible solution in reasonable time. By applying Bellman's principle of optimality, an optimal maintenance plan in case of wear induced component failures is derived. Dual decomposition is implemented to decouple the sequence of operation intervals in between service points, and to derive replacement costs by dual bounds.

By means of the models and algorithms developed, wear-related maintenance costs and downtime of a possible system layout can be anticipated in the early phase of structure determination. This thesis thereby lays a foundation for the control of structural uncertainty in real systems.

Zusammenfassung

Nach Stand von Wissenschaft und Technik werden Komponenten hinsichtlich ihrer Eigenschaften, wie Lebensdauer oder Energieeffizienz optimiert. Allerdings können selbst hervorragende Komponenten zu ineffizienten oder instabilen Systemen führen, wenn ihr Zusammenspiel nur unzureichend berücksichtigt wird. Eine Systembetrachtung schafft ein größeres Optimierungspotential — dem erhöhten Potential steht jedoch auch ein erhöhter Komplexitätsgrad gegenüber. Durch die Kombinationen unterschiedlicher Komponenten zu Systemen existiert eine Vielzahl möglicher Strukturen, wodurch sich eine kombinatorische Explosion des Lösungsraums ergibt.

Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 805 entstanden, dessen Ziel die Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen ist. Die Frage nach der optimalen Struktur eines Systems wurde in diesem Zusammenhang bereits für den Fall eines Stabwerk-Demonstrators untersucht. Diese Arbeit zeigt anhand eines realen Systems aus dem Bereich der Hydraulik, wie Strukturunsicherheit durch Antizipation in der Entwicklungsphase beherrscht werden kann.

Ein hydrostatisches Getriebe, dessen Komponenten Verschleiß ausgesetzt sind, wird mittels gemischt-ganzzahliger linearer Programmierung optimal strukturiert. Das zugehörige Optimierungsmodell basiert auf der Graph-Darstellung des Strukturfindungsproblems. Diese ist im Falle eines serien-parallelen Netzwerkes durch Bäume ohne innere Knoten des Grads zwei darstellbar. Die Arbeit zeigt für den allgemeineren Fall eines nicht serien-parallelen Netzwerkes, wie sich diese Darstellung durch Unterteilung des Graphen in serien-parallele Teilgraphen dennoch nutzen lässt, um in einer Lokalen Suche im Lösungsraum der diskreten Strukturentscheidungen valide Topologievorschläge zu erhalten.

Gerade Strukturfindungsprobleme, in denen zusätzlich dynamische Prozesse wie Verschleiß abgebildet werden sollen, können mit Standardsolvern oft nicht in angemessener Zeit global optimal gelöst werden. Die vorliegende Arbeit nutzt die spezielle Struktur solcher Probleme, um mittels Dekompositionsverfahren primale Lösungen und duale Schranken abzuleiten. Durch eine Primalheuristik, die auf der Metaheuristik Simulated Annealing basiert, können auch dann gute Lösungen für das Optimierungsproblem gefunden werden, wenn kommerzielle Solver überhaupt keine zulässige Lösung in annehmbarer Zeit finden. Mögliche Systemstrukturen werden dabei durch Dynamische Optimierung bewertet. Unter Ausnutzung des Bellman'schen Optimalitätsprinzips wird durch Rückwärtsrekursion eine optimale Wartungsstrategie bei Verschleißprozessen berechnet. Über duale Dekomposition werden zudem zur Abschätzung der Ersatzteilkosten duale Schranken abgeleitet.

Mittels der vorgestellten Modelle und den entwickelten Algorithmen lassen sich verschleißbedingte Wartungskosten und Ausfallzeiten einer Systemvariante bereits in der frühen Phase der Strukturfindung antizipieren. Diese Dissertation legt damit den Grundstein zur Beherrschung von Strukturunsicherheit in realen Systemen.

Contents

List of Figures	XIII
Symbol Directory	XV
1 Introduction	1
1.1 The TOR Ansatz	1
2 Mathematical Basics	5
2.1 Mixed-Integer Programming	5
2.2 Primal, Dual, and the Optimality Gap	6
2.3 Solving to Global Optimality	7
3 Optimization of Technical Systems	9
3.1 Optimization of Fluid Systems	9
3.2 Special Problem Structure of System Synthesis Problems	11
4 Wear Processes and Algorithmic System Design	13
4.1 Mathematical Optimization Model for the Hydrostatic Transmission System	13
4.2 Extension of the Model	17
5 Topology Optimization	21
5.1 Superstructures of Possible Layouts	21
5.2 Number of Possible Topology Options	21
5.3 Topology Options for the Hydrostatic Transmission System	24
5.3.1 Series-Parallel Networks	26
5.4 Local Search for System Topologies	29
5.4.1 Neighborhood Function	31
5.5 Simulated Annealing	36
5.6 Implementation and Benchmarks	38
6 Dynamic Programming	41
6.1 Fundamentals	41
6.2 Application to Dynamic Decision Problems	42
6.3 Algorithmic Operations	45
6.3.1 Benchmarks	48

7	Dual Bounds via Lagrangean Relaxation	51
7.1	Basics of Lagrangean Relaxation	51
7.1.1	Subgradient Method	53
7.2	Lagrangean Decomposition	54
7.3	Wear-Induced Component Replacement	56
7.3.1	Dual Decomposition Approach	56
7.3.2	Verification For Small Test Cases	58
7.3.3	Benchmarks	60
8	Conclusion and Outlook	65
	Bibliography	67

List of Figures

1.1	TOR pyramid illustrating the seven steps of the TOR ansatz.	3
2.1	Convex and non-convex sets.	7
3.1	Problem Structure for a system synthesis problem.	10
3.2	Problem Structure for a system synthesis problem considering dynamic processes	11
4.1	Details on the hydrostatic transmission system.	15
4.2	Optimal topology of the hydrostatic transmission system for a maximum lifespan	17
4.3	Optimal system structures for the hydrostatic transmission system.	20
5.1	Exemplary system topologies for a hydrostatic transmission system.	24
5.2	Runtimes of the commercial solver IBM ILOG CPLEX for the problem of finding an optimal system structure for the hydrostatic transmission system.	25
5.3	Graph of the hydrostatic transmission system considering only open valves in each load case.	27
5.4	Graph representing superstructure of all considered system layouts.	28
5.5	Series-parallel networks of order 1 to 4.	29
5.6	Exemplary executions of the swap neighborhood function.	32
5.7	Exemplary executions of the replace neighborhood function.	33
5.8	Exemplary executions of the switch neighborhood function.	34
5.9	Exemplary executions of the add neighborhood function.	34
5.10	Exemplary executions of the delete neighborhood function.	35
5.11	Progress of the solution quality obtained via simulated annealing for 10 operation intervals.	38
5.12	Results for the simulated annealing heuristic for the case of three operation intervals.	39
6.1	Basic structure for deterministic dynamic programming.	43
6.2	Structure of a dynamic program representing a decision problem containing 3 wear levels and 2 valves, and start of the solution procedure.	45
6.3	Second step of the solution procedure in the dynamic program.	46

List of Figures

6.4	The dynamic optimization yields an optimal policy from stage 0 to stage T	47
6.5	Runtime of the dynamic programming algorithm for the test case of four valves.	49
6.6	Run time of the dynamic program for 10 service intervals for different numbers of valves and different numbers of levels.	49
7.1	Graphical interpretation of the Lagrangean relaxation.	52
7.2	Graphical interpretation of the Lagrangean decomposition.	55
7.3	Evolution of wear, and replacement strategy for a simple test case with one valve.	60
7.4	Evolution of the dual bound with the number of iterations for different test cases.	62
7.5	Evolution of the dual bound for two valves and different numbers of operation intervals.	63

Symbol Directory

Symbols are listed in the first column, and are described in the second column. The third column gives the corresponding dimension if it can be stated, with the base factors length L , mass M , and time T .

Symbol	Description	Dimension
A	Coefficient matrix of a general optimization problem.	
A_{piston}	Piston area.	L^2
α_{v_i, v_j}	Binary variable indicating whether valve (v_i, v_j) is shut or open.	
b	Right-hand vector of a general optimization problem.	
$\bar{b}_{i,j}$	Binary variable indicating whether a component (i, j) is purchased or not.	
c	Coefficient vector of objective function.	
$c^{(k)}$	Control parameter of simulated annealing algorithm in iteration k .	
C_{invest}	Investment costs.	
C_{maint}	Maintenance costs.	
C_{v_i, v_j}	Price of valve (v_i, v_j) .	
c_V	Volume fraction of suspended solids.	
d	Valve diameter.	L
E	Set of edges of a graph.	
E_j	Energy of a state j in the Metropolis algorithm.	
F_l	Required piston force in load case l .	MLT^{-2}
$f_n(s_n)$	Contribution of stages $n, n+1, \dots, N$ to the objective function of a dynamic optimization problem if system starts in state s_n at stage n .	
G	Graph.	
$G(V, E)$	Graph with vertices V and edges E .	
G_l	Graph for load case l .	
g	Subgradient of the Lagrangean function.	
$g^{(k)}$	Subgradient of the Lagrangean function in iteration k of the subgradient method.	
(i, j)	Edge of a graph.	
k	Iteration number.	

Symbol Directory

k_B	Boltzmann constant.	
\mathcal{K}_{l,v_i,v_j}	Reciprocal time constant for wear of valve (v_i, v_j) depending on operating parameters of load case l .	T^{-1}
l	Load case index.	
L	Set of load case indices.	
$L(\lambda)$	Lagrangean function.	
λ	Vector of Lagrange multipliers.	
$\lambda^{(0)}$	Initial vector of Lagrange multipliers in the first iteration of the subgradient method.	
$\lambda^{(k)}$	Vector of Lagrange multipliers in iteration k of the subgradient method.	
$\mu^{(k)}$	Step size in iteration k of the subgradient method.	
n	Index for stages in a dynamic optimization problem.	
N	Number of stages in a dynamic optimization problem.	
p	Pressure.	$L^{-1}MT^{-2}$
p_{\max}	Upper bound for pressure.	$L^{-1}MT^{-2}$
Δp	Pressure decrease.	$L^{-1}MT^{-2}$
π	Circle constant.	
Π	Combinatorial optimization problem.	
\mathcal{P}	Powerset.	
Q	Volume flow.	L^3T^{-1}
Q_{\max}	Upper bound for volume flow.	L^3T^{-1}
r_{s,v_i,v_j}	Binary variable indicating if valve (v_i, v_j) is replaced at maintenance point s .	
\mathbb{R}	The set of real numbers.	
ρ	Oil density.	ML^{-3}
s	Operation interval index.	
s_{best}	Current best solution found by Simulated Annealing.	
s_{initial}	Initial solution the Simulated Annealing algorithm is provided with.	
s_n	Current state for stage n in a dynamic optimization problem.	
S_n	Set of reachable states for stage n in a dynamic optimization problem.	
\tilde{s}, \tilde{t}	Terminals of a graph.	
t	Time step.	
T	Index for last operation interval.	
T_1, \dots, T_4	The four series-reduced trees representing the valve system.	
t_l	Duration of load case l .	T

$tr_n(s_n, x_n)$	Transformation function of a dynamic optimization problem which maps the current state and decision to a new state s_{n+1} .	
u_{\max}	Maximum valve lift.	L
u	Valve lift.	L
V	Set of vertices of a graph.	
\mathcal{V}_l	Set of edges (v_i, v_j) representing valves in a graph G_l corresponding to load case l .	
$\mathcal{V}_{\text{prop}}$	Set of edges representing proportional valves.	
$\mathcal{V}_{\text{prop},l}$	Set of edges representing proportional valves of graph G_l .	
\tilde{v}_l	Required piston velocity in load case l .	LT^{-1}
(v_i, v_j)	Edge representing a valve.	
w_{\max}	Upper bound for the accumulated wear.	L
w_{s,v_i,v_j}	Wear of the control edge of a proportional valve (v_i, v_j) that is accumulated until the end of operation interval s .	L
$w_{s,v_i,v_j}^{\text{begin}}$	Accumulated wear of the control edge of a proportional valve (v_i, v_j) present at the start of operation interval s .	L
$w_{s,v_i,v_j}^{\text{end}}$	Accumulated wear of the control edge of a proportional valve (v_i, v_j) present at the end of operation interval s .	L
$\Delta w_{v_i,v_j}$	Wear of the control edge of a proportional valve (v_i, v_j) .	L
x	Vector of all decision variables of a general optimization problem.	
x^*	Optimal solution to a general optimization problem.	
y_{s,v_i,v_j}	Auxiliary variable for each coupling constraint that represents the common value of the coupled variables for valve (v_i, v_j) in operation interval s .	L
\hat{y}_{s,v_i,v_j}	Average of the variables decoupled by Lagrangean decomposition for valve (v_i, v_j) in operation interval s .	L
z	Objective value of a general optimization problem.	
z^*	Optimal objective value of a general optimization problem.	
z_{dual}	Dual bound.	
z_{LD}	Dual bound obtained by Lagrangean decomposition.	
z_{LP}	Dual bound obtained by LP relaxation.	
z_{LR}	Dual bound obtained by Lagrangean relaxation.	
z_{primal}	Primal bound.	

Symbol Directory

$z_{\text{Sim. Ann.}}$	Objective value obtained by Simulated Annealing.
z_{ub}	General upper bound on the objective value.
\mathbb{Z}	The set of integers.
ζ	Pressure loss coefficient.