

Modellierung und Regelung komplexer dynamischer Systeme

Band 35

Bernd Kolar

**Contributions to the Differential Geometric Analysis
and Control of Flat Systems**

Shaker Verlag
Aachen 2017

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Zugl.: Linz, Univ., Diss., 2017

Copyright Shaker Verlag 2017

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the publishers.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5162-9

ISSN 1866-2242

Shaker Verlag GmbH • P.O. BOX 101818 • D-52018 Aachen

Phone: 0049/2407/9596-0 • Telefax: 0049/2407/9596-9

Internet: www.shaker.de • e-mail: info@shaker.de

Vorwort

Das vorliegende Buch entspricht weitgehend meiner Dissertation, welche ich im Rahmen meiner Tätigkeit als Universitätsassistent am Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung der Johannes Kepler Universität Linz verfasst und im Februar 2017 erfolgreich verteidigt habe.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Kurt Schlacher bedanken, der mein Interesse an Regelungstheorie und differentialgeometrischen Methoden geweckt hat. Ich bin ihm sehr dankbar für die Möglichkeit, in einem hervorragenden Umfeld am Institut für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung forschen zu dürfen, und möchte mich für die Ratschläge und die Unterstützung während der Arbeit an meiner Dissertation bedanken. Besonderer Dank gebührt auch Herrn Prof. Markus Schöberl, der mein wissenschaftliches Denken wesentlich beeinflusst hat, und dem ich für seine Unterstützung und eine Vielzahl von interessanten und hilfreichen Diskussionen danken möchte. Darüber hinaus möchte ich mich bei allen Kollegen am Institut, und insbesondere bei meinem Bürokollegen Hubert Rams, für die angenehme und produktive Arbeitsatmosphäre bedanken.

Weiters ist es mir eine Freude noch Herrn Prof. Joachim Rudolph und Frau Prof. Ülle Kotta hervorzuheben, die mir Forschungsaufenthalte am Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität des Saarlandes und am Institut für Kybernetik an der Technischen Universität Tallinn ermöglicht haben. Herrn Prof. Rudolph möchte ich außerdem für die Zweitbegutachtung meiner Dissertation danken.

Schließlich möchte ich mich noch bei meiner Familie bedanken, sowie allen Freunden die mich in den vergangenen vier Jahren unterstützt haben.

Linz, im März 2017

Bernd Kolar

Abstract

The present thesis deals with continuous-time and discrete-time nonlinear flat systems with lumped parameters. If a continuous-time system is flat, then all system variables can be expressed by a flat output and its time derivatives. This allows also for nonlinear systems a systematic planning of trajectories and a systematic controller design. For this reason, and because of the fact that a large number of systems that appear in industrial applications are flat, the concept of flatness has become quite popular over the last 25 years. However, a major problem is that there still do not exist efficiently verifiable necessary and sufficient conditions for flatness, and therefore also the computation of flat outputs is a difficult problem.

In this thesis, the flatness of continuous-time systems is discussed in a finite-dimensional differential geometric framework. One of the main topics is the analysis of the map that describes the parameterization of the system variables by the flat output, which is hereinafter referred to as parameterizing map. For the parameterization of the system variables, a certain sequence of codistributions, which is determined by the flat output, plays an essential role. It is shown that for flat outputs which are independent of time derivatives of the input these codistributions always possess a basis with a special triangular structure, and this result allows to derive upper bounds for the order of the highest time derivatives that occur in the parameterizing map. The derived bounds improve those that can be found in the literature, and are of interest e.g. for the computation of flat outputs. Furthermore, the Jacobian matrix of the parameterizing map is studied, and it is shown that the submatrix which contains the derivatives with respect to the highest time derivatives of the flat output has remarkable properties. For systems that are flat but not static feedback linearizable this submatrix is necessarily singular, and its rank is connected to the existence of input transformations which achieve that a part of the new inputs appears in an affine way. The well-known ruled manifold necessary condition for flat systems is an immediate consequence of the latter result. A further main topic of this thesis is the problem of computing flat outputs of continuous-time systems. Two approaches are discussed,

where the first one is based on the idea of splitting off endogenous dynamic feedbacks, and the second one is based on the idea of transforming the system into a structurally flat triangular form. With respect to the latter approach, an important contribution of the present thesis is to analyze under which conditions a flat system can be represented in this structurally flat triangular form. Here the above-mentioned sequence of codistributions plays again an important role. A further topic is the design of flatness based tracking controls for continuous-time systems. An elegant standard approach is based on the exact linearization of the system by means of a quasi-static state feedback, which necessitates that time derivatives of the flat output up to a certain order are measured or estimated by an observer. However, often it would be desirable to work with measurements or estimates of the state variables instead, and it is shown that, under certain conditions, it is indeed possible to replace the required time derivatives of the flat output systematically by the state.

Besides continuous-time systems, in this thesis also flat discrete-time systems are studied, which possess the property that all system variables can be expressed by a flat output and its forward-shifts. In contrast to the problem of static feedback linearization, flatness of discrete-time systems has received only little attention so far. Like for continuous-time systems, there do not exist efficiently verifiable necessary and sufficient conditions for the flatness of discrete-time systems, and thus the computation of flat outputs is also a difficult problem. Therefore, a substantial part of this thesis is again concerned with the computation of flat outputs, where similar ideas as in the continuous-time case are pursued. However, the geometric representation of discrete-time systems differs considerably from the geometric representation of continuous-time systems. Thus, the conditions for the existence of certain important decompositions are quite different, and the required coordinate transformations have to be constructed in a different way.

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt zeitkontinuierliche und zeitdiskrete nichtlineare flache Systeme mit konzentrierten Parametern. Wenn ein zeitkontinuierliches System flach ist, dann können alle Systemgrößen durch einen flachen Ausgang und dessen Zeitableitungen ausgedrückt werden. Dies ermöglicht auch für nichtlineare Systeme eine systematische Trajektorienplanung und einen systematischen Reglerentwurf. Aus diesem Grund, und wegen der Tatsache, dass viele in industriellen Anwendungen auftretende Systeme flach sind, wurde das Konzept der Flachheit in den letzten 25 Jahren sehr populär. Ein wesentliches Problem besteht jedoch darin, dass es keine effizient überprüfbaren notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Flachheit gibt, und deshalb ist auch die Berechnung flacher Ausgänge ein schwieriges Problem.

In dieser Arbeit wird die Flachheit zeitkontinuierlicher Systeme in einem finit-dimensionalen differentialgeometrischen Rahmen betrachtet. Einer der Schwerpunkte liegt auf der Analyse der Abbildung welche die Parametrierung der Systemgrößen durch den flachen Ausgang beschreibt, und die im Folgenden als parametrierende Abbildung bezeichnet wird. Für die Parametrierung der Systemgrößen spielt eine bestimmte Folge von Kodistributionen, welche durch den flachen Ausgang festgelegt ist, eine zentrale Rolle. Es wird gezeigt, dass für flache Ausgänge welche nicht von Zeitableitungen des Eingangs abhängen diese Kodistributionen immer eine Basis mit einer speziellen Dreiecksstruktur besitzen, und dieses Ergebnis erlaubt es, obere Schranken für die höchsten in der parametrierenden Abbildung auftretenden Zeitableitungen herzuleiten. Die hergeleiteten Schranken verbessern die aus der Literatur bekannten, und sind beispielsweise für die Berechnung flacher Ausgänge von Interesse. Weiters wird die Jacobimatrix der parametrierenden Abbildung untersucht, und es wird gezeigt, dass die Submatrix mit den Ableitungen bezüglich der höchsten Zeitableitungen des flachen Ausgangs bemerkenswerte Eigenschaften besitzt. Für Systeme welche flach aber nicht Eingangs-Zustandslinearisierbar sind ist diese Submatrix notwendigerweise singulär, und ihr Rang steht mit der Existenz von Eingangstransformationen, welche bewirken, dass ein Teil der neuen Eingänge affin auftritt, in Verbindung.

Die bekannte, für Flachheit notwendige Regelflächenbedingung ist eine unmittelbare Folge des letzteren Ergebnisses. Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Berechnung flacher Ausgänge von zeitkontinuierlichen Systemen. Es werden zwei Zugänge diskutiert, wobei dem ersten die Idee des Abspaltens von endogenen dynamischen Rückführungen zugrunde liegt, und der zweite basiert auf der Transformation des Systems auf eine strukturell flache Dreiecksform. Im Hinblick auf die letztere Methode besteht ein wesentlicher Beitrag der vorliegenden Arbeit darin, zu analysieren unter welchen Bedingungen ein flaches System in dieser strukturell flachen Dreiecksform dargestellt werden kann. Dabei spielt die oben erwähnte Folge von Kodistributionen wieder eine wichtige Rolle. Ein weiteres Thema ist der Entwurf flachheitsbasierter Folgeregeln für zeitkontinuierliche Systeme. Eine elegante Standardmethode basiert auf der exakten Linearisierung des Systems mittels einer quasistatischen Zustandsrückführung, die jedoch erfordert, dass Zeitableitungen des flachen Ausgangs bis zu einer gewissen Ordnung gemessen oder durch einen Beobachter geschätzt werden. Oft wäre es aber von Vorteil, wenn stattdessen Mess- oder Schätzwerte der Zustandsgrößen benutzt werden könnten, und es wird gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich die benötigten Zeitableitungen des flachen Ausgangs systematisch durch den Zustand ersetzt werden können.

Neben zeitkontinuierlichen Systemen werden in dieser Arbeit auch flache zeitdiskrete Systeme betrachtet, welche die Eigenschaft besitzen, dass alle Systemgrößen durch einen flachen Ausgang und dessen Vorwärtsverschiebungen ausgedrückt werden können. Im Gegensatz zum Problem der Eingangs-Zustandslinearisierbarkeit wurde der Flachheit zeitdiskreter Systeme bisher nur wenig Aufmerksamkeit zuteil. Wie bei den zeitkontinuierlichen Systemen gibt es keine effizient überprüfbar notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Flachheit zeitdiskreter Systeme, und folglich ist die Berechnung flacher Ausgänge ebenfalls ein schwieriges Problem. Deshalb liegt ein Schwerpunkt wieder auf der Berechnung flacher Ausgänge, wobei ähnliche Ideen wie im zeitkontinuierlichen Fall verfolgt werden. Die geometrische Darstellung zeitdiskreter Systeme unterscheidet sich aber deutlich von der geometrischen Darstellung zeitkontinuierlicher Systeme. Deshalb ergeben sich andere Bedingungen für die Existenz bestimmter wichtiger Zerlegungen, und die benötigten Koordinatentransformationen müssen auf andere Weise konstruiert werden.

Contents

1	Introduction	1
2	Mathematical Preliminaries	7
2.1	Vector Fields, Differential Forms and Lie Derivatives	8
2.2	Maps Between Manifolds, Pushforward and Pullback	13
2.2.1	Submersions and Diffeomorphisms	14
2.3	Submanifolds	16
2.4	Functional Dependence	20
2.5	Fibred Manifolds and Bundles	23
3	Geometric Representation of Dynamical Systems	27
3.1	Geometric Representation of Continuous-Time Systems	27
3.1.1	Representation as Vector Field	27
3.1.1.1	Elimination of Redundant Inputs	31
3.1.1.2	Affine Input Systems	32
3.1.1.3	System Decompositions	34
3.1.2	Pfaffian Systems	39
3.2	Geometric Representation of Discrete-Time Systems	42
3.2.1	Representation as Map	43
3.2.2	Representation as Submanifold	45
4	Flatness of Continuous-Time Systems	51
4.1	Derivative Coordinates and Multi-Indices	52
4.2	Static Feedback Linearization	53
4.3	A Finite-Dimensional Geometric Framework	55
4.4	A Sequence of Codistributions Determined by the Flat Output . .	63
4.4.1	The VTOL Aircraft	71
4.4.2	An Example with Three Inputs	75
4.4.3	A Simple 1-Flat Example	77

4.5	Bounds for the Order of the Time Derivatives in the Parameterizing Map	79
4.6	The Jacobian Matrix of the Parameterizing Map	81
4.7	Flatness and Dynamic Feedback Linearization	87
4.7.1	Linearization by Endogenous Dynamic Feedback	89
4.7.2	Linearization by Prolongations of the Inputs	91
5	Construction of Flat Outputs for Continuous-Time Systems	93
5.1	Splitting Off Endogenous Dynamic Feedbacks	95
5.2	A Structurally 1-Flat Implicit Triangular Form	103
5.2.1	A Constructive Method to Find a Transformation	108
5.2.2	Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Triangular Representation	111
6	Remarks on the Control of Continuous-Time Flat Systems	123
6.1	Tracking Control Based on an Endogenous Dynamic Feedback . .	124
6.2	Tracking Control Based on a Quasi-Static State Feedback	125
6.3	Substitution of the Generalized Brunovsky State with a Classical State	127
6.4	Example Gantry Crane	128
7	Flatness of Discrete-Time Systems	133
7.1	Static Feedback Linearization for Discrete-Time Systems	133
7.2	Difference Flatness	136
8	Construction of Flat Outputs for Discrete-Time Systems	139
8.1	Splitting Off Endogenous Dynamic Feedbacks	140
8.2	A Structurally 1-Flat Implicit Triangular Form	147
8.2.1	Decomposition Step for Systems in State Representation .	150
8.2.2	Decomposition Step for Implicit (Sub-) Systems	151
8.2.3	Connection with Static Feedback Linearizability	153
8.2.4	Examples	154
8.2.4.1	Example I	154
8.2.4.2	Example II	156
8.2.4.3	Simplified Model of a Car	158
A	Supplements	161
A.1	Coordinate Transformations on the Extended State- and Input Manifold	161
A.1.1	Continuous-Time Systems	161
A.1.2	Discrete-Time Systems	162
A.2	Generalized Brunovsky States	163
	Bibliography	171