

Jürgen Hausen

Lineare Algebra I

3. korrigierte Auflage

Shaker Verlag
Aachen 2017

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2017

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5205-3

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende Text entstand aus einer einführenden Vorlesung “Lineare Algebra” im Rahmen des Mathematikstudiums. Ich habe mich um knappe Darstellung und einen möglichst geradlinigen Zugang zu den aus meiner Sicht wichtigsten Themen bemüht, ohne dabei auf vollständige Beweise und Beispiele zu verzichten. Jeder Textabschnitt lässt sich in einer Vorlesungsdoppelstunde (90 min.) behandeln. Unumgängliche Unannehmlichkeiten, wie etwa der Nachweis der Vektorraumaxiome für \mathbb{R}^n , sind m.E. weder dazu geeignet, sie dem Leser als Übung zu empfehlen, noch sie in der Vorlesung vollständig vorzuführen; ich habe sie im Text aufgeführt, allerdings in kleingedruckter Form.

Tübingen im Februar 2007

Jürgen Hausen

Vorwort zur zweiten Auflage

Es sind einige Tippfehler korrigiert und die eine oder andere Unstimmigkeit ist beseitigt — all denen, die mir dabei geholfen haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt!

Tübingen im September 2009

Jürgen Hausen

Vorwort zur dritten Auflage

Weitere Tippfehler wurden beseitigt und neben kleineren Ergänzungen kam ein Abschnitt mit Beispielen zur Diagonalisierbarkeit dazu. Mein herzlicher Dank gilt allen, die geholfen haben!

Tübingen im März 2017

Jürgen Hausen

INHALTSVERZEICHNIS

1. Grundlagen	1
1.1. Logik und Beweisen	1
<i>Aussagen, logische Operationen und, oder, Negation, Implikation, Äquivalenz, Wahrheitstablen, All- und Existenzaussagen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.1	5
1.2. Mengen	7
<i>Cantorscher Mengenbegriff, Teilmengen, Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, direktes Produkt, Familien</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.2	13
1.3. Abbildungen	15
<i>Abbildungen, Bild, Urbild, Komposition, injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrabbildung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.3	21
1.4. Ergänzungen zu 1.2 und 1.3	23
<i>Direktes Produkt und Projektionen, Graph einer Abbildung, Abbildungen endlicher Mengen</i>	
2. Etwas Algebra	25
2.1. Gruppen	25
<i>Verknüpfungen, neutrale und inverse Elemente, Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Beispiel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.1	31
2.2. Ringe	33
<i>Ringe, Rechnen in kommutativen Ringen, Ringhomomorphismen, Einheiten, Beispiel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.2	39
2.3. Körper	41
<i>Körper, Körper der komplexen Zahlen, Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, lineare Gleichungssysteme über Körpern</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.3	45
3. Vektorräume	47
3.1. Vektorräume und Untervektorräume	47
<i>Vektorräume, \mathbb{K}^n, Untervektorräume, Durchschnitt von Untervektorräumen, Vektorräume von Abbildungen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.1	53
3.2. Lineare Hülle und lineare (Un-)abhängigkeit	55
<i>Linearkombinationen, lineare Hülle, lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.2	59
3.3. Basen und Koordinaten	61
<i>Erzeugendensysteme, Basen, Entwicklung nach einer Basis, Koordinaten, Vektorraum der Polynome</i>	

Aufgaben zu Abschnitt 3.3	67
3.4. Existenz von Basen und Dimension	69
<i>Basisergänzungssatz, Austauschprinzip, Dimensionsbegriff</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.4	73
4. Lineare Abbildungen	75
4.1. Lineare Abbildungen	75
<i>Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Charakterisierung der Injektivität, Dimensionsformel und ihre Anwendungen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 4.1	81
4.2. Matrizen	83
<i>Matrizen, Matrix-Vektor-Multiplikation, Matrizenmultiplikation, Matrizenring, Invertierbarkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 4.2	87
4.3. Lineare Abbildungen und Matrizen	89
<i>Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen, Vektorraum der linearen Abbildungen, Endomorphismenring</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 4.3	95
4.4. Der Dualraum	97
<i>Linearformen, Dualraum, duale Basis, duale Abbildung, Transponierte einer Matrix</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 4.4	101
5. Matrizenrechnung	103
5.1. Zeilen- und Spaltenoperationen	103
<i>Zeilenoperationen, Zeilenstufenform, Gaußscher Algorithmus, Spaltenoperationen, Elementarmatrizen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.1	109
5.2. Der Rang einer Matrix	111
<i>Spaltenrang, Zeilenrang, Rang, Charakterisierungen von Invertierbarkeit, Rangbestimmung, Inversenberechnung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.2	117
5.3. Lineare Gleichungssysteme	119
<i>Lineare Gleichungssysteme, verschiedene Lösbarkeitskriterien, Lösungsverfahren</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 5.3	125
6. Die Determinante	127
6.1. Permutationen	127
<i>Permutationen, Symmetrische Gruppe, Transpositionen, Signum, Alternierende Gruppe</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.1	131
6.2. Determinanten	133
<i>Determinante einer Matrix, Eigenschaften der Determinante, Determinantenmultiplikationssatz</i>	

Aufgaben zu Abschnitt 6.2	137
6.3. Determinantenberechnung	139
<i>Determinante einer Dreiecksmatrix, komplementäre Matrix, Cramersche Regel, Laplacescher Entwicklungssatz</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.3	145
7. Miscellanea	147
7.1. Direkte Zerlegungen	147
<i>Summen, direkte Summen, lineare Projektionen, Fall zweier Untervektorräume</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 7.1	153
7.2. Quotientenvektorräume	155
<i>Äquivalenzrelationen, Quotientenvektorräume, Homomorphiesatz, Dimensionsformel</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 7.2	161
7.3. Basiswechsel	163
<i>Transformationsformeln für Koordinaten und darstellende Matrizen, Determinante eines Endomorphismus, Normalformenproblem</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 7.3	167
8. Diagonalisierbarkeit	169
8.1. Eigenwerte und Eigenvektoren	169
<i>Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.1	173
8.2. Polynomring und Körper der rationalen Funktionen	175
<i>Polynomring, Division mit Rest, Integritätsringe, Quotientenkörper, Körper der rationalen Funktionen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.2	181
8.3. Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit	183
<i>Charakteristisches Polynom, algebraische und geometrische Vielfachheiten, Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.3	187
8.4. Beispiele	189
<i>Explizite Bestimmung von Eigenwerten, Vielfachheiten, Eigenräumen und Transformationsmatrizen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.4	193
9. Euklidische und unitäre Vektorräume	195
9.1. Euklidische Vektorräume	195
<i>Skalarprodukt, Norm, Länge, Winkel, Orthogonalität, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Dreiecksungleichung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 9.1	199
9.2. Orthonormalbasen	201
<i>Orthonormalbasen, Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, orthogonale Zerlegung, Isometrien, orthogonale Matrizen</i>	

Aufgaben zu Abschnitt 9.2	205
9.3. Unitäre Vektorräume	207
<i>Hermitesche Skalarprodukte, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, Isometrien, unitäre Matrizen.</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 9.3	213
9.4. Selbstadjungierte Endomorphismen	215
<i>Selbstadjungierte Endomorphismen, hermitesche und symmetrische Matrizen, Hauptachsentransformation</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 9.4	219
Index	221