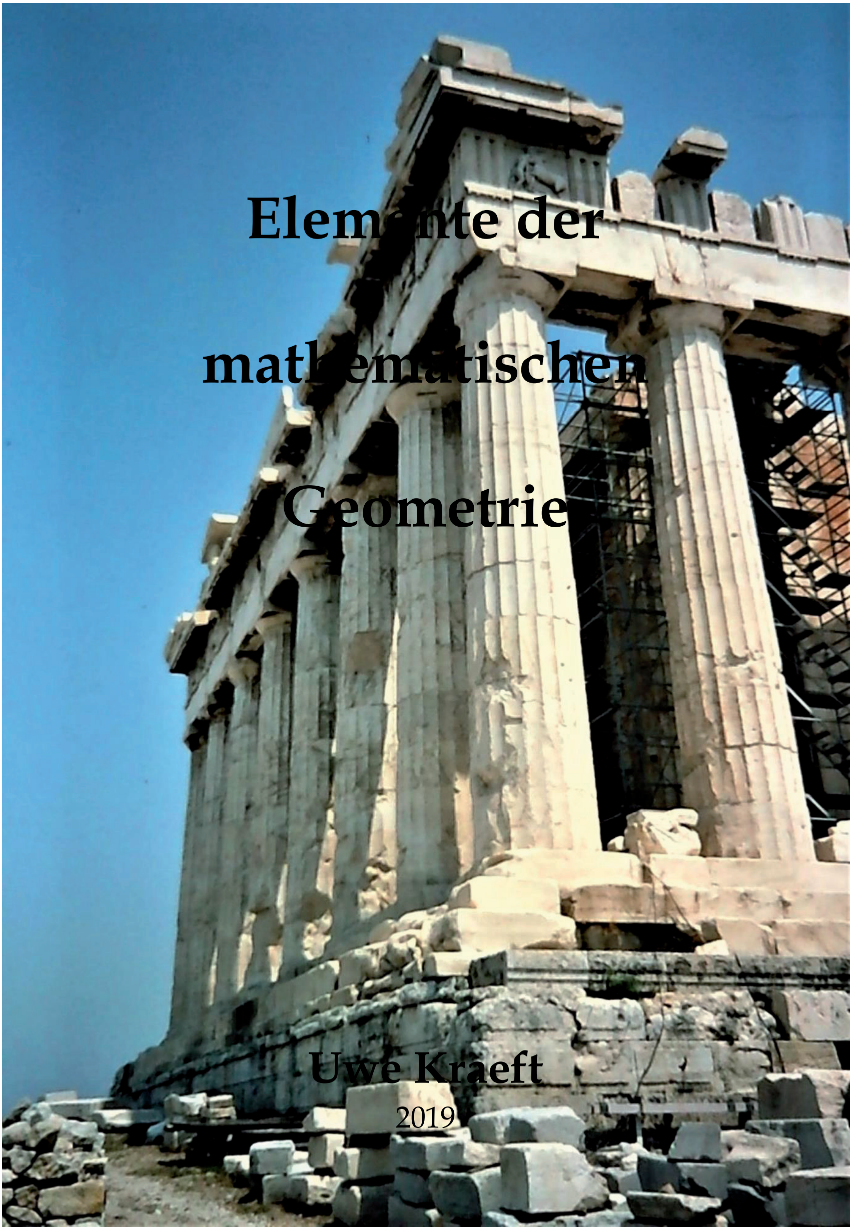
Mathematik

Uwe Kraeft

Elemente der mathematischen Geometrie

Shaker Verlag



Elemente der mathematischen Geometrie

Uwe Kraeft

2019

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Elemente der mathematischen Geometrie

Shaker Verlag
Aachen 2019

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-6451-3
ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Dieser Text ist eine elementare geometrische Ergänzung zur „Einführung in die Angewandte Mathematik“ des „Lehrgangs der Mathematik“. Dabei stehen die enge Verbindung der Geometrie mit der Algebra und Infinitesimalrechnung sowie einfache Anwendungen im Vordergrund. Die geometrische Darstellung kann vereinfacht auch als grafische „Stenographie“ der mathematischen Sprache bezeichnet werden, was auch aus der Bezeichnung der Funktion als „Abbildung“ ersichtlich ist. Geometrische Darstellungen von Funktionen und insbesondere von statistischen Abhängigkeiten sind im Übrigen bekanntlich nur Modelle der „Realität“ und nicht mit dieser zu verwechseln.

Das Ziel ist wie in den anderen Texten dieser Einführung in die Mathematik eine leicht verständliche elementare Darstellung ausgewählter Strategien und Verfahren, die auch ohne Spezialkenntnisse lesbar ist, und weder eine axiomatisch begründete und logisch entwickelte Abhandlung, die in der klassischen Geometrie zum Beispiel bereits mit den bekannten „Elementen“ vorhanden ist, noch eine Abhandlung über spezielle Methoden der Darstellenden Geometrie oder etwa der Geometrien von Riemann und Hilbert.- Wesentliche Teile des 9. Kapitels wurden bereits in [KrVIIIb] als Anhang veröffentlicht. Die Analytische Geometrie sowie die Symmetrien sind in eigenen Texten zu finden [KrIII, IX].

Hier werden in 12 Kapiteln nach einer Einführung die Euklidische Geometrie, Anmerkungen zur praktischen Geometrie, Funktionen, das totale Differenzial, die Werkzeuge der Infinitesimalrechnung, Kurven der Ebene, die Ellipse und Lemniskate, Spiralen und Schrauben, Kurven des Raums, Flächen des Raums sowie die Integration als geometrische Abbildung in elementarer Darstellung einführend behandelt. Eine Literaturauswahl ist beigefügt. Die Literaturzitate betreffen wie in den vorangehenden Bänden nicht nur die Übernahme von Inhalten, sondern sind auch ein Hinweis für interessierte Leser zur weiteren Information. In einem Anhang sind ausgewählte geometrisch relevante Beispiele der Bioinformatik sowie Physik dargestellt.

Das Buch stellt die Meinung des Autors nach dem Studium der Literatur und dessen Kenntnissen dar. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Leimen, im November 2018 Uwe Kraeft
http://www.uwe-kraeft.de/

Auswahl von Symbolen

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	hieraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
$\in$	ist Element von (ist enthalten in)
f	Abbildung
f(x)	Bild des Originals x
P_0	$= (x_0 \vert y_0 \vert ...)$ Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, …
$\vec{r}$	$= (x_0, y_0, ...)$ Vektor mit den Komponenten x_0, y_0, …
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen n = 1, 2, 3, …
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen, zum Beispiel a, b, c, …, x, y, z
$\cdot, \bullet, \times$	Produkt, Skalarprodukt, Vektorprodukt
=	nur in der reinen Mathematik genau gleich (identisch); wird praktisch auch für Grenzwerte verwendet
$\cong$	so nah wie gewünscht, aber nicht gleich
$\approx$	ungefähr, gerundet, kann für große n angenähert werden
$\sim$	von ähnlicher Größenordnung, proportional
$\neq$	ungleich
$<, \leq, >, \geq$	kleiner, kleiner oder gleich, größer, größer oder gleich
$\sum_{n_1}^{n_2}$	Summe von n_1 bis n_2
$\sqrt{}$	Quadratwurzel
sin, cos, tan	trigonometrische Funktionen
$f'(x)=\frac{dy}{dx}$	erste Ableitung von f(x) mit $dx \neq 0$
$\dot{x}$	$=\frac{dx}{dt}$
$\frac{\partial f(x,y,...)}{\partial x}$	$=f_x$ erste Ableitung von f(x,y,…) nach x
$f^{(n)}(x)$	n-te Ableitung von f(x)
F(x)	Integral von f(x): $\int_a^b f(x)dx$ mit $dx \neq 0$ (oder Abbildung wie f)
S, s, K, k, R, ρ, …	Bogenlänge, Krümmung, Krümmungsradius, …
Def.	Definition
Anm.	Anmerkung

Weitere Symbole werden im Text erklärt.

Differential oder Differenzial

Die älteren Leser werden vielleicht noch in der Schule vom Unendlich Kleinen beziehungsweise Großen gehört und dieses wohl kaum verstanden, sondern allenfalls dem Lehrer geglaubt haben. In der Tat ist das Unendliche erkenntnistheoretisch eine Frage des Glaubens. In der Zahlentheorie kennen wir heute grob vereinfacht „ruhende Zahlen", wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, und die „bewegten (oder gedachten) Zahlen", wie die Teilmenge $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ der reellen Zahlen, das Unendlich Kleine oder Unendlich Große, beziehungsweise entsprechende Anordnungen daraus, wie zum Beispiel die Vektoren. Tatsächlich sind die „bewegten Zahlen" beliebig lang durchführbare Algorithmen wie die Bestimmung von Quadratwurzeln und können als Grenzwerte auch ruhende Zahlen besitzen, wie $\sqrt{4}$, oder nicht, wie $\sqrt{2}$. Die geschriebenen „bewegten Zahlen" sind sogenannte Platzhalter (engl. „Icons"). Noch leichter verständlich ist das Gesagte, wenn direkt eine Reihe beliebiger Länge angegeben ist, wie zum Beispiel:

$$\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{2^{0}}+\frac{1}{2^{1}}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\ldots+\frac{1}{2^{n}} \cong 4, \qquad ;$$

$$\sum_{i=m\le 1}^{0<i=n\to\infty} \frac{1}{2^{i}} \cong 2^{|m-1|};$$

das Ergebnis der ersten Zeile ist so nah bei 4 wie gewünscht, aber nicht gleich 4.

Zu den „bewegten Zahlen" gehören auch vor allem das Unendlich Kleine beziehungsweise Große. Wer weiterhin an deren Existenz glauben und damit arbeiten möchte, kann sich vereinfacht gesagt diese als sehr kleine beziehungsweise sehr große ruhende rationale Zahlen vorstellen.

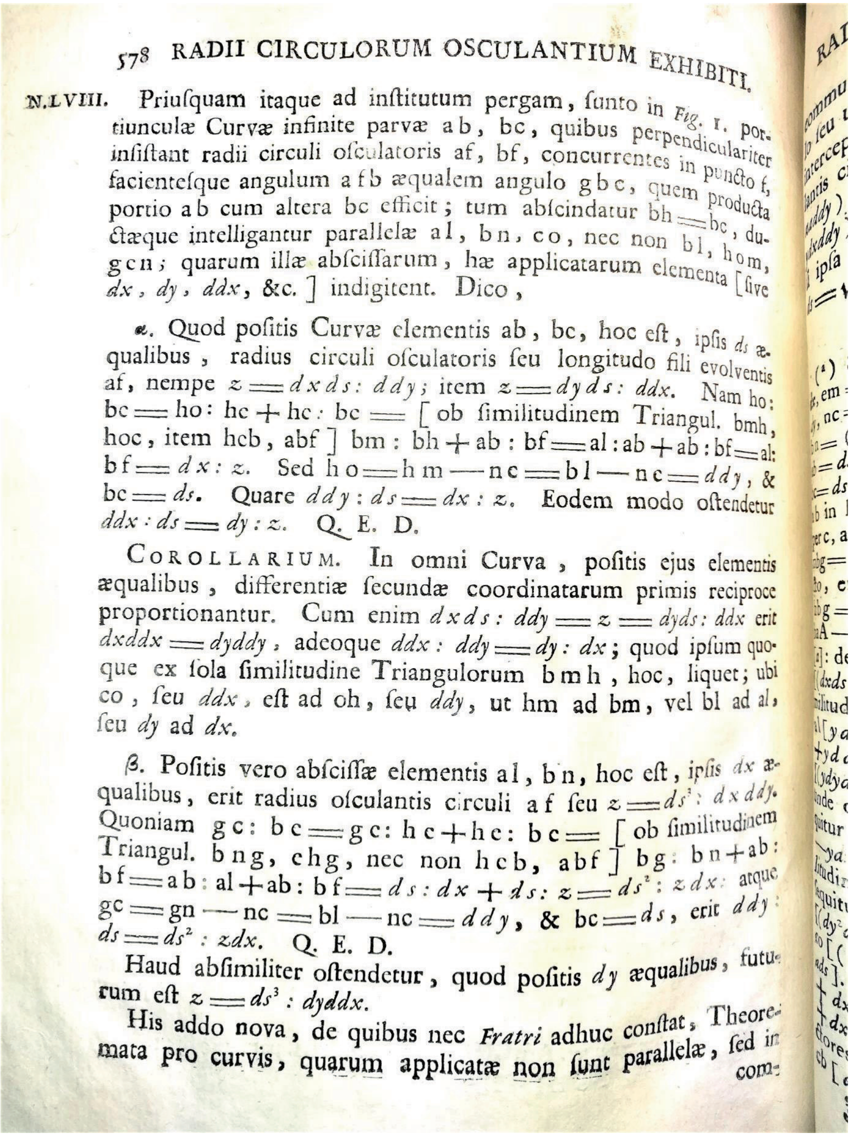
In der Differenzialrechnung oder früher Differentialrechnung wird beim Grenzwertübergang vom Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zum Differenzialquotienten oder Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ durch eine beliebig kleine rationale beziehungsweise bewegte Zahl, das Differenzial oder Differential dx, dividiert. Sämtliche Operationen damit und vor allem die Divisionen beruhen auf der Forderung, dass die Nenner ungleich Null sind, denn durch Null kann nicht geteilt werden. Auch deren Inverses existiert als Unendlich Großes nur als Algorithmus, indem durch etwas immer Kleineres dividiert wird.

Im Lateinischen bedeutet „differentia“ Verschiedenheit oder Unterschied[1)]. Ähnlich verhält es sich mit dem Wort „different“ im Englischen. Im Duden steht „Differenzial (rot) auch Differential, das; -s, -e (math. unendlich kleine Differenz; …)“[2)]. Damit ist die Schreibweise mit „z“ die verständlichere, da es sich beim Differenzial ja tatsächlich um eine **Differenz** ungleich Null handelt, was möglicherweise auch den Anlass für die Änderung der alten Schreibweise bot. Zur Verdeutlichung sollte vor allem bei Herleitungen von Formeln oder in Beweisen immer $dx \neq 0$ festgehalten oder zumindest beachtet werden.

[1)]Langenscheidts Großes Schulwörterbuch Lateinisch-Deutsch, bearbeitet von Dr. Erich Pertsch auf der Grundlage des Menge-Güthling, 7. Auflage, (1991), Langenscheidt, Berlin.

[2)]Duden, Die deutsche Rechtschreibung, 21. Auflage, (1996), Dudenverlag, Mannheim.

Inhalt



578 RADII CIRCULORUM OSCULANTIUM EXHIBITI.

N.LVIII. Priuſquam itaque ad inſtitutum pergam, ſunto in *Fig.* I. portiunculæ Curvæ infinite parvæ ab, bc, quibus perpendiculariter inſiſtant radii circuli oſculatoris af, bf, concurrentes in puncto f, facienteſque angulum afb æqualem angulo gbc, quem producta portio ab cum altera bc efficit; tum abſcindatur $bh = bc$, ductæque intelligantur parallelæ al, bn, co, nec non bl, hom, gcn; quarum illæ abſciſſarum, hæ applicatarum elementa [ſive dx, dy, ddx, &c.] indigitent. Dico,

α. Quod poſitis Curvæ elementis ab, bc, hoc eſt, ipſis ds æqualibus, radius circuli oſculatoris ſeu longitudo fili evolventis af, nempe $z = dxds : ddy$; item $z = dyds : ddx$. Nam $ho : bc = ho : hc + hc : bc =$ [ob ſimilitudinem Triangul. bmh, hoc, item hcb, abf] $bm : bh + ab : bf = al : ab + ab : bf = al : bf = dx : z$. Sed $ho = hm - nc = bl - nc = ddy$, & $bc = ds$. Quare $ddy : ds = dx : z$. Eodem modo oſtendetur $ddx : ds = dy : z$. Q. E. D.

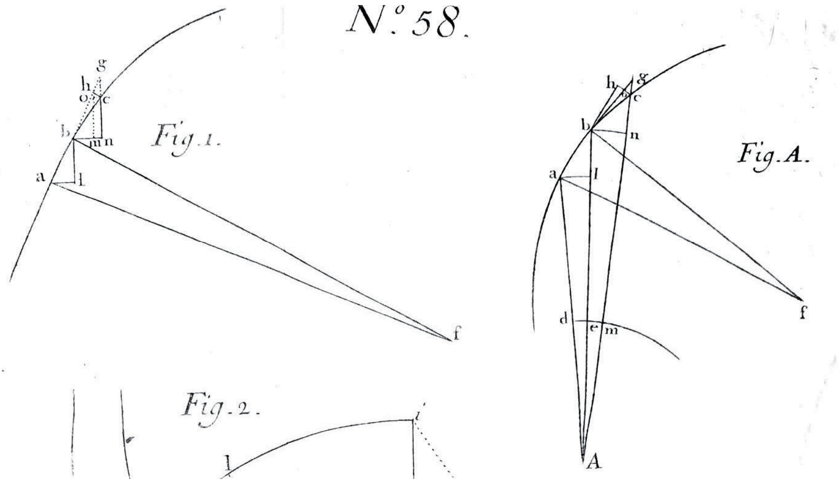
Corollarium. In omni Curva, poſitis ejus elementis æqualibus, differentiæ ſecundæ coordinatarum primis reciproce proportionantur. Cum enim $dxds : ddy = z = dyds : ddx$ erit $dxddx = dyddy$, adeoque $ddx : ddy = dy : dx$; quod ipſum quoque ex ſola ſimilitudine Triangulorum bmh, hoc, liquet; ubi co, ſeu ddx, eſt ad oh, ſeu ddy, ut hm ad bm, vel bl ad al, ſeu dy ad dx.

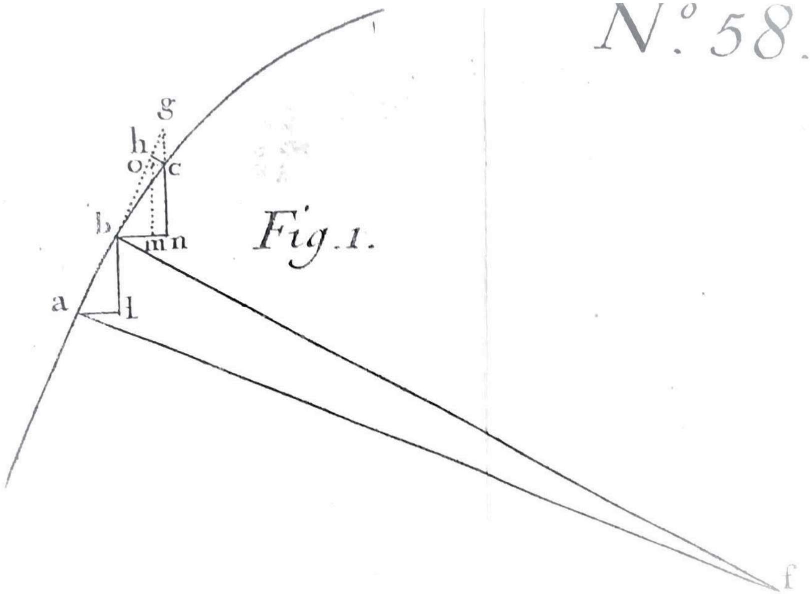
β. Poſitis vero abſciſſæ elementis al, bn, hoc eſt, ipſis dx æqualibus, erit radius oſculantis circuli af ſeu $z = ds^3 : dxddy$. Quoniam $gc : bc = gc : hc + hc : bc =$ [ob ſimilitudinem Triangul. bng, chg, nec non hcb, abf] $bg : bn + ab : bf = ab : al + ab : bf = ds : dx + ds : z = ds^2 : zdx$: atque $gc = gn - nc = bl - nc = ddy$, & $bc = ds$, erit $ddy : ds = ds^2 : zdx$. Q. E. D.

Haud abſimiliter oſtendetur, quod poſitis dy æqualibus, futurum eſt $z = ds^3 : dyddx$.

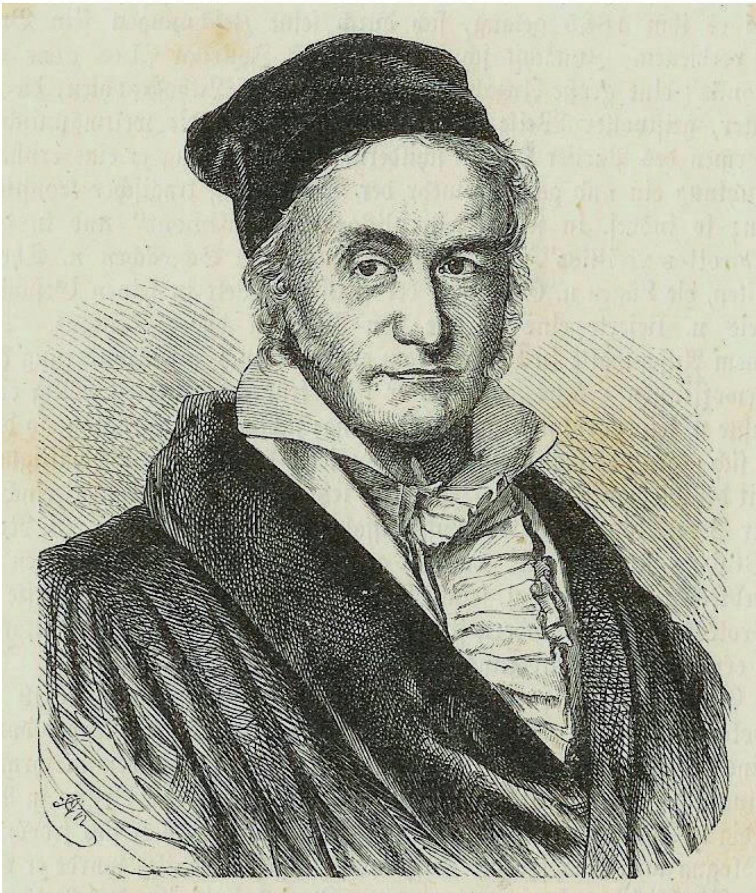
His addo nova, de quibus nec *Fratri* adhuc conſtat, Theoremata pro curvis, quarum applicatæ non ſunt parallelæ, ſed in com-

Jakob Bernoulli: Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera I, (1744), Cramer & Fratrum Philibert, Genf.
Jakob Bernoulli hat wesentliche Beiträge zur Differenzialgeometrie geleistet [Be], [BWM].





Jakob Bernoulli: Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera I, (1744),
Cramer & Fratrum Philibert, Genf.



Nr. 3026. Karl Friedrich Gauß (geb. 30. April 1777, gest. 23. Febr. 1855).